TD3

Exercice 1

Montrer grace à un calcul de determinant que la famille f est libre dans E.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $f = ((1,2),(2,3))$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $f = ((1,2,3),(2,1,3),(4,8,7))$.
3. $E = \mathbb{R}^4$, $f = ((1,1,2,\pi),(-1,1,\sqrt{7},\ln 2),(1,1,4,6+\pi),(-1,1,1+\sqrt{7},\ln(2e)))$.

Exercice 2

Calculer l'inverse des matrices suivantes

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 7,5 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par A.*

1. *Trouver $x_1 \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1) = -x_1$*
2. *Ecrire la matrice de passage de la base canonique B dans la base $B' = ((1,1),(0,1))$*
3. *Calculer A', la matrice de f dans la base B'*
4. *Calculer de deux facons $P(X) = \det(XId - A) \in \mathbb{R}[X]$*
5. *Déterminer les racines de $P(X)$.*

Exercice 4

Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = -x_2$, $B' = (x_1, x_2)$.

Exercice 5

Soient F_1, F_2, F_3 trois s.e.v de E. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$

Exercice 6

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que le rang de A ne dépend pas du corps de base choisi ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{k}_3[X]$, $F = \{P \in E \ tq \ P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \ tq \ P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, *et* $H = \{P \in E \ tq \ P(X) = P(-X)\}$.

1. *Montrer que* $F \oplus G = \{P \in E \ tq \ P(1) = P(2) = 0\}$.
2. *Montrer que* $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 8
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. *Montrer que* $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.