TD4

Exercice 1 (dimension 2...)
Pour les matrices suivantes, donnez le polynome caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Dire de plus si la matrice est diagonalisable.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (...dimension 3...)
Meme exercice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (... et un peu de dimension n)
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Determiner le polynome caractéristique de A, ses valeurs propres et ses vecteurs propres. La diagonaliser.

Exercice 4
Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, W une base de F complétée en une base B de E. Soit f un endomorphisme de E. Donner (et démontrer) une condition nécéssaire et suffisante sur $Mat_B(f)$ pour que F soit stable par f (i.e. $f(F) \subset F$)

Exercice 5
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{k})$. On pose alors $n = p + q$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Determiner les relations entre les valeurs propres de A et C et les valeurs propres de M. De meme pour les sous-espaces propres et les sous-espaces caractéristiques. Enfin, que peut-on dire sur les questions de diagonalisabilité et trigonalisabilité de A, C et M.

Exercice 6
Donner les relations existants entre les sous espaces propres, (resp.) caractéristiques de A et A^n