TD5

Exercice 1
Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, W une base de F complétée en une base B de E. Soit f un endomorphisme de E. Donner (et démontrer) une condition nécéssaire et suffisante sur $Mat_B(f)$ pour que F soit stable par f (i.e. $f(F) \subset F$).
Indice *: On pourra essayer sur des cas particuliers en petite dimension pour voir ce qui se passe.*

Exercice 2
Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (y, -x)$.

1. *Interpreter f de façon géométrique.*
2. *Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de f ?*
3. *Memes questions avec $f(x, y) = (y, x)$.*

Exercice 3
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{k}^2 & \to & \mathbb{k}^2 \\ (x,y) & \to & (0,0) \end{array}$. L'application f est-elle un endomorphisme ? A-t-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Exercice 4
Donner un exemple d'endomorphisme trigonalisable, non diagonalisable (justifier).

Exercice 5
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Est-ce que A est diagonalisable ?
Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6
Soit $E = \mathbb{R}^3 = \{X = (x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. On considère $F_1 = \{X | x + 2y = 2z\}$ et $F_2 = \{X | x + 3z + 1 = 0\}$. Le sous-ensemble F_i est-il un sous-espace vectoriel de E ? Si oui, en donner une base, ainsi qu'un supplémentaire G_i dans E.
Soit S_i la symétrie par rapport à F_i parallèlement à G_i. Ecrire la matrice de l'application S_i dans une base de votre choix puis dans la base canonique de E (si F_i est un s.e.v).

Exercice 7

(i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \{f : [\![1;n]\!] \to \mathbb{k}\}$. Montrer que E est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? Exhiber une base de E.

(ii) Soit $g : E \to E$ l'application définie ainsi : $g(f)(i) = \begin{cases} f(i+1) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 & \text{si } i = n. \end{cases}$
Montrer que g est un endomorphisme de E. Quelles sont les valeurs propres de g ? Et les vecteurs propres ?

(iii) Mêmes questions (ici $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) avec l'endomorphisme h défini ainsi : $h(f)(i) = \begin{cases} f(i+1) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ f(1) & \text{si } i = n. \end{cases}$

(iv) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner les résultats (presque) sans calculs pour l'endomorphisme t_k défini ainsi : $t_k(f)(i) = \begin{cases} f(i+k) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-k \\ f(j) & \text{si } i+k = n+j. \end{cases}$

Exercice 8

Soit $E = \mathbb{k}_N[X]$ (On fera tout d'abord les calculs dans le cas $N = 2$). On considère les endomorphismes f et g suivants :

$$f(P)(X) = P(X-2) \qquad g(P)(X) = P(X+1) - P'(X).$$

Determiner les valeurs propres et sous-espaces propres de f et g. Diagonaliser ces endomorphismes