TD6

Exercice 1 (Utilisez des théorèmes)
Les matrices suivantes sont-elles trigonalisables ? diagonalisables ? (On considérera les cas $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$*.)*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^4 *et* A^{-1} *grace à Cayley Hamilton.*

Meme question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
Diagonaliser ou trigonaliser (suivant possibilité) les matrices suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre maintenant le système $A_1X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *par une méthode moins couteuse que la résolution globale.*

Mêmes questions avec $A_2X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $A_3X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4
Soit A *une matrice réelle*

Montrer que si A *est diago(resp. trigo)nalisable sur* $\mathbb{R}$ *alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur* $\mathbb{C}$*. Donner des contre-exemples des réciproques*

Montrer que si A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 5
Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. *On note* $C = I_n - AB$ *et* $D = I_p - BA$.

1) *Montrer que si* C *est inversible alors* D *est inversible (résoudre* $DX = 0$*).*
2) *Le cas échéant, exprimer* D^{-1} *en fonction de* A, B, C^{-1}.
3) *En déduire que* AB *et* BA *ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si* $n = p$.