TD7 et TD8

Exercice 1
Donner les valeurs propres et espaces propres des endomorphismes suivants du plan $\mathbb{R}^2$ *: la projection orthogonale sur une droite* D *notée* p_D *; la symétrie axiale ; la symétrie centrale ; la rotation de centre 0 et d'angle* θ *(notée* R_θ*) ; la translation de vecteur* $\vec{v}$ *; la composé* $p_D \circ R_{\pi/2}$*. On ditinguera plusieurs cas lorsque cela sera nécessaire.*

Exercice 2
Donner les polynome minimaux de p_D *et de* $p_D \circ R_{\pi/2}$*. Ces endomorphismes sont-il diagonalisables ?*

Exercice 3
Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4
Soit A *une matrice réelle*

Montrer que si A *est diago(resp. trigo)nalisable sur* $\mathbb{R}$ *alors elle est diago(resp. trigo)nalisable sur* $\mathbb{C}$*. Donner des contre-exemples des réciproques*

Montrer que si A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*, avec des valeurs propres réelles, alors elle est diagonalisable sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 5
Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6
Soit A *une matrice nilpotente (*i.e. *il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* A^n*=0).*
Montrer que $Id - A$ *est inversible. Quels sont ses valeurs propres ?*
Montrer que A *est trigonalisable.*

Exercice 7
Soit f *un endomorhisme de* $\mathbb{k}^3$ *vérifiant* $f^2 = f + Id$*. Quels sont les polynomes minimaux possibles pour* f*.*
Meme question pour un endomorphisme g *de* $\mathbb{k}^4$ *vérifiant* $g^3 = 2g^2 - g$

Exercice 8
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$*. On note* $C = I_n - AB$ *et* $D = I_p - BA$*.*

1) Montrer que si C est inversible alors D est inversible (résoudre $DX = 0$).
2) Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1}.
3) En déduire que AB et BA ont les memes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.