TD9

Exercice 1
Faire les exercices 6 et 7 de la feuille précédente s'ils n'ont pas été faits.

Exercice 2
Pour les matrices suivantes, donner le polynome caractéristique et le polynome minimal.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer de plus A^2 puis A^3 en fonction de A pour les 2 premières matrices.

Exercice 3
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres complexes non necessairement distincts. On note $\mu_1, \dots, \mu_k$ ces memes nombres complexes, sans répétition. On note $m_i = \sharp\{j \in [\![1, n]\!] | \mu_i = \lambda_j\}$. Calculer le polynome caractéristique et le polynome minimal de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \mu_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Mettre A sous forme de Jordan dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
*Soit $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrice 2*2 de trace nulle. Montrer que tout élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$ est soit nilpotent soit diagonalisable.*

Exercice 6
Trigonaliser cette matrice et calculer sa puissance n-ième $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On donne deux méthodes pour calculer* A^n.

1. *Calculer le polynome minimal de* A. *Montrer qu'on peut écrire* A^n *sous la forme* $u_n A + v_n Id$, *puis calculer les coefficient* u_n *et* v_n *grace à l'exercice précédent*
2. *Trigonaliser* A

Exercice 8

Soit $u : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y, z, -x-y-z) \end{array} \right.$. *Décomposer* $\mathbb{R}^3$ *en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme* u.