TD1: Espaces Vectoriels

Dans toute la feuille $\mathbb{k}$ est un corps (à priori quelconque)

Exercice 1 (au plus 30 minutes)
Dans chacun des exemples suivants, E est-il un $\mathbb{k}$-espace vectoriel ? Justifier.
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *(et donc $\mathbb{k} = \mathbb{R}$)*
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 6\} \subseteq \mathbb{R}^3$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$ *(et donc $\mathbb{k} = \mathbb{C}$)*
- *E est l'ensemble des matrices symétriques de taille 2×2*
- *E est l'ensemble des fonctions affines de la forme $x \to ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{k}$).*

Exercice 2
Si F et G sont des sous $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de E, montrer que $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E. On rappelle que $F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$.

Exercice 3
Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$. Trouver une base de E et la completer en une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 4
Soit $E = \mathbb{R}^3$, déterminer $F + G$ et $F \cap G$ dans les cas suivants :
- $F = \{(a, b, c) \mid a - 2c = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \mid (z + y) + (z - y) = x\}$,
- $F = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$,
- $F = \{(x, y, z) \mid x + y = 0$ *et* $z = 0\}$ *et* $G = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$.

Dans quels cas F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 5
Donner des bases des sous-espaces vectoriels F et G de l'exercice précédent.

Exercice 6
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. *Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriels $\mathcal{F}$?
1. $\mathcal{F}_0 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0\}$,
2. $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(1) = 0\}$,
3. $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 1\}$,
4. $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0$ *et* $f(1) = 0\}$,
5. $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f$ *est continue*$\}$,
6. $\mathcal{F}_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f$ *est dérivable*$\}$,
7. $\mathcal{F}_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f$ *est continue et croissante*$\}$.

Exercice 7
Les familles suivantes sont-elles libres ? Justifier

1) $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

2) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

Donner deux bases de $\mathbb{R}^2$ utilisant les vecteurs précédents

Exercice 8

Soient $P_0,\ P_1,\ P_2$ et P_3 les polynômes définis par

$$P_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3), \qquad P_1(X) = X(X-2)(X-3),$$
$$P_2(X) = X(X-1)(X-3), \qquad P_3(X) = X(X-1)(X-2).$$

Montrer que ces polynômes forment une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'ils forment une base des polynomes de degré $\leqslant 3$