TD2 : Applications linéaires

Les exercices estampillés (*) sont censés être un peu plus difficiles.

Exercice 1

Soit $\mathbb{k}$ un corps quelconque (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $E = \mathbb{k}^2$ et $F = \mathbb{k}^3$.

1. *Donner une famille libre de E non génératrice et une famille génératrice non libre de E.*
2. *Est-ce que l'application determinant : det : $E \to \mathbb{k}$ est une application linéaire ?*
3. *Soit* $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y) \end{array}$
   i) Ecrire la matrice de l'application f dans la base canonique.
   ii) Déterminer le noyau et l'image de f.
4. *Mêmes questions avec F à la place de E et* $f : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ ,(x,y,z) & \mapsto & (3x+2y, 3y+2z, -4z+9x) \end{array}$
5. *Ecrire la matrice de cette dernière application dans la base $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ (après avoir vérifié que cette dernière famille est une base de F).*

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel E des polynomes de degré inférieur à 2 et l'application $D : E \to E$ de dérivation.

i) Ecrire la matrice de l'application D dans la base canonique B.
ii) Déterminer le noyau et l'image de D.
iii) Ecrire la matrice de D dans la base $B' = ((X-1)^n)_{n=0,1,2}$.
iv) Ecrire la matrice de passage de B à B'.

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, E et F seront deux espaces vecoriels donnés de dimension finie. On se donnera aussi une application $f : E \to F$. On demande de vérifier que l'application est une application linéaire et d'écrire la matrice de l'application f dans des bases de votre choix.

- *$E = F = M_2(\mathbb{k})$. On pose f comme étant l'application de transposition : $A \mapsto A^t$.*
- *$E = M_2(\mathbb{k})$, $F = M_{2,3}(\mathbb{k})$. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$. On définit f par $f.B = B.A$ pour $B \in E$.*

Exercice 4 (*)

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Soit $D \subset E$ la droite d'équation $x - 2y = 0$. On définit $S : E \to E$ comme étant la symétrie orthogonale par rapport à D.

Ecrire la matrice de S dans la base canonique et dans une base de votre choix (Essayez de vous faire en sorte que la matrice soit plus simple).
Ecrire la matrice de passage d'une base à l'autre. Determiner le noyau de $S - Id$ et le noyau de $S + Id$.
Donner une interprétation géométrique.

Exercice 5 (*)
Soit $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, n nombres réels ordonnés. Soit $f_i(x) = exp(a_n x)$.
Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est libre

Exercice 6 (*)
Montrer que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$.
Est-ce que $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ définie par $\sigma(z_1, \ldots, z_n) = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$ est une $\mathbb{R}$-application linéaire ? Une $\mathbb{C}$-application linéaire ? Si oui écrire sa matrice dans une base appropriée.

Exercice 7 (*)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $Im(f) = Ker(f)$ si et seulement si la dimension de E est paire.

Exercice 8 (*)
Pour tout entier n, trouver un exemple d'endomorphisme f tel que

$$0 \subsetneq Im(f^n) \subsetneq Im(f^{n-1}) \subsetneq \cdots \subsetneq Im(f) \subsetneq E$$