

TD3

Exercice 1 (Extraits de partiel)

Expliquer précisément à quelle étape les raisonnements suivants sont faux ou insuffisants (même si les résultats peuvent être justes).

1. L'ensemble $F = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ n'est pas stable pour l'addition. En effet, soient $(x, y), (x', y') \in F$, on a alors

$$(x + x')^2 = x^2 + 2xx' + (x')^2 = y + y' + 2xx' \neq y + y'.$$

2. L'ensemble $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0\}$ est stable par multiplication par un scalaire. En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a alors

$$\lambda(x, y, z) = \lambda(2x + y) = 2\lambda x + \lambda y = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Comment les corriger ?

Exercice 2

Montrer grâce à un calcul de déterminant que la famille f est libre dans E .

1. $E = \mathbb{R}^2$, $f = ((1, 2), (2, 3))$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $f = ((1, 2, 3), (2, 1, 3), (4, 8, 7))$.

Exercice 3

Calculer l'inverse des matrices suivantes

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 7,5 \end{pmatrix}$

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 défini par A .

1. Trouver $x_1 \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1) = -x_1$
2. Ecrire la matrice de passage de la base canonique B dans la base $B' = ((1, 1), (0, 1))$
3. Calculer A' , la matrice de f dans la base B'

4. Calculer de deux façons $P(X) = \det(XId - A) \in \mathbb{R}[X]$
5. Déterminer les racines de $P(X)$.

Exercice 5

Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = -x_2$,
 $B' = (x_1, x_2)$.

Exercice 6

Soient F_1, F_2, F_3 trois s.e.v de E . Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0\}$

Exercice 7 (*)

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que le rang de A ne dépend pas du corps de base choisi (\mathbb{R} ou \mathbb{C})

Exercice 8 (*)

Soit $E = \mathbb{k}_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tq } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tq } P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tq } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

Exercice 9 (*)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$.