TD4

Exercice 1 (dimension 2...)
Pour les matrices suivantes, donnez le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (...dimension 3...)
Meme exercice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 (... et un peu de dimension n(*))
On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Determiner le polynome caractéristique de A, ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Exercice 4
*Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel, W une base de F complétée en une base B de E. Soit f un endomorphisme de E. Donner (et démontrer) une condition nécéssaire et suffisante sur $Mat_B(f)$ pour que F soit stable par f (*i.e. *$f(F) \subset F$)*

Exercice 5
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (-y, x)$. Est-ce que u a des espaces propres.

Exercice 6 (*)
Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec n impair a au moins un vecteur propre (non nul).
Qu'en est-il pour $\mathbb{C}^n$?

Exercice 7

Montrer qu'un endomorphisme f est injectif si et seulement si il n'a pas de valeur propre nulle.

Exercice 8

Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres d'une matrice diagonale.

Exercice 9 (*)

Donner les relations d'inclusion entre les sous espaces propres de A et A^n

Exercice 10 (**)

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{k})$. On pose alors $n = p + q$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Determiner les relations entre les valeurs propres de A et C et les valeurs propres de M. Faire de même pour les sous-espaces propres.