TD4

Exercice 1

Diagonaliser si possible les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Modélisation)

m renards sont introduits dans un écosystème où il y a n lapins au départ.

1 renard mange 4 lapins en 1 mois.

Chaque mois, 1 lapin naît par lapin existant.

Chaque mois, 1 renard naît par tranche de 4 renards existants.

Déterminer ce qui se passe d'un mois à l'autre par une matrice.

Décrire l'évolution du système vers l'infini en fonction de n et m .

Exercice 3 (Modélisation (bis))

On remplace maintenant les renards par des chasseurs.

0 chasseurs sont présent le premier mois.

1 chasseur tue 1 lapin par mois.

L'office des forêts, qui veut exterminer les lapins, délivre 1 permis supplémentaire chaque mois, par groupe de k lapins comptés le mois précédent.

Déterminer des conditions nécessaires sur k pour que l'office des forêts atteigne son objectif.

Exercice 4

Soit A une matrice nilpotente (i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n=0$).

Montrer que $Id - A$ est inversible. Quels sont ses valeurs propres ?

Exercice 5

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{k}^3$ vrifiant $f^2 = f + Id$. Quels sont les polynomes minimaux possibles pour f .

Meme question pour un endomorphisme g de $\mathbb{k}^4$ vrifiant $g^3 = 2g^2 - g$