TD5

Exercice 1
Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Montrer qu'un endomorphisme f est injectif si et seulement si il n'a pas de valeur propre nulle.

Exercice 3
Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres d'une matrice diagonale.

Exercice 4
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{k}^2 & \to & \mathbb{k}^2 \\ (x,y) & \to & (0,0) \end{array}$. *L'application f est-elle un endomorphisme ? A-t-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?*

Exercice 5
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. *Est-ce que A est diagonalisable ? (presque sans calculs)*

Mêmes questions avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *(un peu plus de calculs).*

Exercice 6
Soit $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^2$ l'application définie par $f(x,y) = (y,-x)$.

1. *Interpreter f de façon géométrique.*
2. *Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de f ?*
3. *Est-ce cohérent avec l'interprétation géométrique ?*
4. *Memes questions avec $f(x,y) = (y,x)$.*

Exercice 7
Trouver une matrice diagonalisable de taille $5 * 5$, non diagonale, ayant pour valeurs propres $1, 2, 3, 4, 5$.

Exercice 8 (*)
Montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec n impair a au moins un vecteur propre (non nul).
Qu'en est-il pour $\mathbb{C}^n$?

Exercice 9 (*)
Donner les relations d'inclusion entre les sous espaces propres de A et de A^n

Exercice 10 (**)
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{k})$. On pose alors $n = p + q$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Determiner les relations entre les valeurs propres de A et C et les valeurs propres de M. Faire de même pour les sous-espaces propres.