

TD7

Exercice 1
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^4 et A^{-1} grace à Cayley Hamilton.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Donner les polynômes minimaux des matrices suivantes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Donner les sous-espaces propres et caractéristiques des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit A une matrice réelle. Montrer que si A est diagonalisable sur \mathbb{R} alors elle est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Exercice 5 (*)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{k})$. On note $C = I_n - AB$ et $D = I_p - BA$.

- 1) Montrer que si C est inversible alors D est inversible (résoudre $DX = 0$).
- 2) Le cas échéant, exprimer D^{-1} en fonction de A, B, C^{-1} .
- 3) En déduire que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non-nulles. Examiner le cas de la valeur propre 0 si $n = p$.

Exercice 6 (*)

Montrer qu'un endomorphisme de \mathbb{R}^n avec n impair a au moins un vecteur propre (non nul).
Qu'en est-il pour \mathbb{C}^n ?

Exercice 7 (*)

Donner les relations d'inclusion entre les sous-espaces propres de A et de A^n

Exercice 8 ()**

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{k})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{k})$. On pose alors $n = p + q$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Déterminer les relations entre les valeurs propres de A et C et les valeurs propres de M . Faire de même pour les sous-espaces propres.