

TD8

Exercice 1

Donner (sans démonstration) les valeurs propres et espaces propres des endomorphismes suivants du plan \mathbb{R}^2 (lorsque ce sont bien des endomorphismes).

la projection orthogonale sur une droite D notée p_D ; la symétrie axiale; la symétrie centrale; la rotation de centre 0 et d'angle θ (notée R_θ); la translation de vecteur \vec{v} ; la composé $p_D \circ R_{\pi/2}$. On distinguera plusieurs cas lorsque cela sera nécessaire.

Exercice 2 (Modélisation)

m renards sont introduits dans un écosystème où il y a n lapins au départ.

Le renard mange 1 lapin par jour.

Chaque mois, un couple de lapin a une portée de 6 lapins.

Déterminer ce qui se passe d'un mois à l'autre par une matrice.

Décrire l'évolution du système vers l'infini en fonction de n et m .

Exercice 3 (Modélisation (bis))

Mêmes questions où on remplace le renard par des chasseurs (0 chasseurs le premier mois).

On suppose de plus que l'office des forêts, qui veut exterminer les lapins, délivre 1 permis supplémentaire chaque mois, par groupe de k lapins comptés le mois précédent.

Déterminer des conditions nécessaires sur k pour que l'office des forêts atteigne son objectif.

Exercice 4

Diagonaliser ou trigonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

Soit A une matrice nilpotente (i.e. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n=0$).

Montrer que $Id - A$ est inversible. Quels sont ses valeurs propres ?

Exercice 6

Soit f un endomorphisme de \mathbb{k}^3 vérifiant $f^2 = f + Id$. Quels sont les polynômes minimaux possibles pour f .

Même question pour un endomorphisme g de \mathbb{k}^4 vérifiant $g^3 = 2g^2 - g$