

## TD9

**Exercice 1**

Diagonaliser ou trigonaliser  $A$  dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2**

Pour les matrices suivantes, donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer de plus  $A^2$  puis  $A^3$  en fonction de  $A$  pour les 2 premières matrices.

**Exercice 3**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des nombres complexes non nécessairement distincts. On note  $\mu_1, \dots, \mu_k$  ces memes nombres complexes, sans répétition. On note  $m_i = \#\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \mu_i = \lambda_j\}$ . Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de chacune des matrices suivantes :

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \mu_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_k \end{pmatrix}$$

**Exercice 4**

Soit  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  de trace nulle. Montrer que tout élément de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$  est soit nilpotent soit diagonalisable.

**Exercice 5**

Trigonaliser cette matrice et calculer sa puissance  $n$ -ième  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 6**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . On donne deux méthodes pour calculer  $A^n$ .

1. Calculer le polynôme minimal de  $A$ . Montrer qu'on peut écrire  $A^n$  sous la forme  $u_n A + v_n Id$ , puis calculer les coefficients  $u_n$  et  $v_n$  grâce à l'exercice précédent
2. Trigonaliser  $A$

**Exercice 7**

Soit  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (y, z, -x - y - z) \end{cases}$ . Décomposer  $\mathbb{R}^3$  en sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme  $u$ .