

Éléments sur le Produit Tensoriel

Tous les algèbres/anneaux sont associatifs et unitaires (sauf s'ils sont « de Lie »).

I. Introduction

I.1) Algèbre d'un produit et produit d'algèbres ($\mathbb{C}[X_1, X_2]$ vs $\mathbb{C}[X_1]$ et $\mathbb{C}[X_2]$)

Cet exemple est tiré de [1]. L'algèbre des polynômes à deux variables $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ est naturellement l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{C}^2$. Il est naturel de considérer $\mathbb{C}^2$ comme un produit $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, où chaque copie de $\mathbb{C}$ est décrite par son algèbre de fonctions, disons $\mathbb{C}[X_1]$ et $\mathbb{C}[X_2]$. Une question (naturelle ?) est : quelle opération algébrique sur les algèbres $\mathbb{C}[X_1]$ et $\mathbb{C}[X_2]$ a pour résultat l'algèbre des fonctions du produit $\mathbb{C}^2$?

Bon, on connaît la réponse : c'est $\mathbb{C}[X_1, X_2]$... La question se reformule donc en : comment décrire $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ en termes de $\mathbb{C}[X_1]$ et $\mathbb{C}[X_2]$? On voit bien comment fabriquer une fonction $f \otimes g$ sur $\mathbb{C}^2$ à partir de deux fonctions f et g sur $\mathbb{C}$, en posant pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$: $f \otimes g(x_1, x_2) = f(x_1)g(x_2)$.

Si on considère que $f \in \mathbb{C}[X_1]$ et $g \in \mathbb{C}[X_2]$, et qu'on injecte ces deux algèbres dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ (pas naturel), $f \otimes g$ s'identifie au produit fg . Bien sûr, on n'obtient pas tous les polynômes comme cela : par exemple, $X_1X_2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ (car il l'est dans $\mathbb{C}(X_1)[X_2]$) et ne saurait s'écrire comme produit d'un élément de $\mathbb{C}[X_1]$ et d'un de $\mathbb{C}[X_2]$. En revanche, on voit que *tout polynôme de $\mathbb{C}[X_1, X_2]$ est une somme finie de produits de la forme $f(X_1)g(X_2)$* . En effet, si $h = \sum_{i,j} a_{ij} X_1^i X_2^j$, h est la somme des produits de $f_{ij} = a_{ij} X_1^i$ et $g_{ij} = X_2^j$, mais aussi des produits de $\tilde{f}_{ij} = X_1^i$ et $\tilde{g}_{ij} = a_{ij} X_2^j$, etc.

Le produit tensoriel de $\mathbb{C}[X_1]$ et $\mathbb{C}[X_2]$ sera un espace¹ qui existe indépendamment de $\mathbb{C}[X_1, X_2]$, dont les éléments sont les *sommes de produits* d'éléments notés formellement $f \otimes g$, avec $f \in \mathbb{C}[X_1]$ et $g \in \mathbb{C}[X_2]$.

On note au passage un point important : une décomposition en somme de produits n'est généralement pas unique.

I.2) Linéarité et bilinéarité

De façon plus générale, le slogan qui motive le produit tensoriel est le suivant.

Slogan. Transformer un problème bilinéaire ou multilinéaire en un problème linéaire.

1. C'est même une algèbre, voir II.3.f).

Informellement, la construction du produit tensoriel répond au problème suivant : étant donné un anneau commutatif (par exemple un corps) A et des modules M, N, P sur A , comment décrire les applications bilinéaires de $M \times N$ dans P ? Réponse : par une application linéaire du *produit tensoriel* $M \otimes N$ de M et N dans P .

II. Cas (du produit tensoriel sur un anneau) commutatif

II.1) Constructions

II.1.a) sur les modules

Soient A un anneau commutatif et M et N deux A -modules. On considère le groupe additif libre $F := \mathbb{Z}^{(M \times N)}$ engendré par les couples $(m, n) \in M \times N$. On définit alors

$$M \otimes_A N := F / \left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \quad (a \cdot m, n) - (m, a \cdot n), \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \mid a \in A, m, m_i \in M, n, n_i \in N \end{array} \right\}$$

On notera même $M \otimes N$ à la place de $M \otimes_A N$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'anneau A considéré.

La classe d'un couple $(m, n) \in F$ dans $M \otimes_A N$ est notée $m \otimes n$, on l'appelle un *tenseur pur*. Un élément a priori quelconque de $M \otimes_A N$ est une somme finie de tenseurs purs $\sum_{i=1}^n m_i \otimes n_i$.

Lorsque l'on veut exhiber une propriété de $M \otimes_A N$, il suffit bien souvent de l'exhiber pour les éléments de la forme $m \otimes n$. Par exemple, pour définir une application $M \otimes_A N \rightarrow P$, il suffit de définir l'image des tenseurs purs $m \otimes n$.

Le groupe additif $M \otimes_A N$ est en fait un A -module naturel via la formule :

$$a \cdot (m \otimes n) := (am) \otimes n \quad (= m \otimes (an)).$$

Par construction, on a les relations suivantes, avec des notations évidentes :

$$(a_1 m_1 + a_2 m_2) \otimes n = a_1 m_1 \otimes n + a_2 m_2 \otimes n, \quad m \otimes (a_1 n_1 + a_2 n_2) = a_1 m \otimes n_1 + a_2 m \otimes n_2.$$

On dispose aussi d'une application A -bilinéaire $g : \begin{array}{ccc} M \times N & \rightarrow & M \otimes_A N \\ (m, n) & \mapsto & m \otimes n \end{array}$.

Comme annoncé dans le slogan, on dispose de la propriété universelle suivante.

Proposition. Soit $f : M \times N \rightarrow P$ une application A -bilinéaire (avec P un A -module). Alors f se factorise à travers g . Autrement dit, il existe une unique application A -linéaire $h : M \otimes_A N \rightarrow P$ telle que $f = h \circ g$:

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & M \otimes_A N \\ & \searrow f & \downarrow h \\ & & P \end{array}$$

Il suffit pour cela de montrer que l'on définit bien une application (A -linéaire) en posant $h(m \otimes n) := f(m, n)$.

On a une certaine associativité du produit tensoriel.

Exercice. L'application
$$\begin{array}{ccc} (M \otimes_A N) \otimes_A P & \longrightarrow & M \otimes_A (N \otimes_A P) \\ (m \otimes n) \otimes p & \longmapsto & m \otimes (n \otimes p) \end{array}$$
 est un isomorphisme.

Exercice. Étendre l'énoncé précédent lorsque l'on a deux anneaux A et B , que M est un A -module, P un B module et que N est à la fois un A -module et un B -module, les deux structures commutant l'une à l'autre ($a \cdot (b \cdot n) = b \cdot (a \cdot n)$ pour $a \in A, b \in B, n \in N$). On veut : $(M \otimes_A N) \otimes_B P \simeq M \otimes_A (N \otimes_B P)$.

Exercice. Montrer de même que l'on a un isomorphisme :
$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A N & \xrightarrow{\sim} & N \otimes_A M \\ m \otimes n & \longmapsto & n \otimes m \end{array}.$$

Remarque. Sachant que les groupes abéliens sont les $\mathbb{Z}$ -modules, on peut considérer $M \otimes N := M \otimes_{\mathbb{Z}} N$, lorsque M et N sont deux groupes abéliens.

II.1.b) sur les morphismes de modules

Si $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ et $\psi : N_1 \rightarrow N_2$ sont des morphismes de A -module, alors on peut définir

$$\varphi \otimes \psi : \begin{array}{ccc} M_1 \otimes N_1 & \longrightarrow & M_2 \otimes N_2 \\ m \otimes n & \longmapsto & \varphi(m) \otimes \psi(n) \end{array}.$$

Exercice. Vérifier la compatibilité de la composition et du produit tensoriel au niveau des morphismes : $(\varphi \otimes \psi) \circ (\varphi' \otimes \psi') = (\varphi \circ \varphi') \otimes (\psi \circ \psi')$ lorsque cela a un sens.

Exemple. Il suffit de poser : $\text{Id}_M \otimes \text{Id}_N = \text{Id}_{M \otimes N}$.

II.1.c) sur les algèbres

Lorsque M et N sont, de plus, des A -algèbres, (ou simplement des anneaux, *i.e.* des $\mathbb{Z}$ -algèbres), on peut munir le A -module $M \otimes_A N$ d'une structure de A -algèbre en définissant

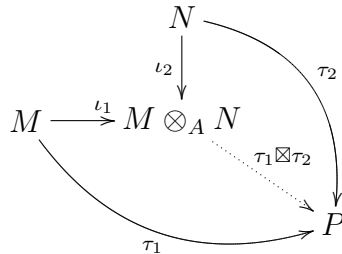
$$(m_1 \otimes n_1)(m_2 \otimes n_2) := (m_1 m_2) \otimes (n_1 n_2).$$

Notons que M et N peuvent très bien être non-commutatives.

Dans ce cas, il existe des morphismes naturels de A -algèbres

$$\iota_1 : \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & M \otimes_A N \\ m & \mapsto & m \otimes 1 \end{array}, \quad \iota_2 : \begin{array}{ccc} N & \rightarrow & M \otimes_A N \\ n & \mapsto & 1 \otimes n \end{array}.$$

De plus, ceci a la propriété universelle suivante. Si on dispose de deux morphismes de A -algèbres (ou anneaux) $\tau_1 : M \rightarrow P$ et $\tau_2 : N \rightarrow P$, alors on peut factoriser τ_1 et τ_2 à travers $M \otimes_A N$. Autrement dit, il existe un unique morphisme $\tau_1 \boxtimes \tau_2 : M \otimes_A N \rightarrow P$ tel que $\tau_1 = (\tau_1 \boxtimes \tau_2) \circ \iota_1$ et $\tau_2 = (\tau_1 \boxtimes \tau_2) \circ \iota_2$.



Il suffit en effet de poser $(\tau_1 \boxtimes \tau_2)(m \otimes n) := \tau_1(m)\tau_2(n)$.

WARNING : ce produit tensoriel de morphismes d'algèbres n'a pas grand chose à voir avec celui introduit sur les morphismes de modules en II.1.b). Les définitions se rejoignent cependant dans le cadre de I.1).

II.1.d) Algèbre tensorielle

Soit M un A -module. D'après l'associativité du produit tensoriel (II.1.a)), on peut définir sans ambiguïté $M^{\otimes n} := \underbrace{M \otimes \cdots \otimes M}_n$. Alors l'algèbre tensorielle associée à M est

$$T(M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\otimes n}.$$

Il s'agit naturellement d'un A -module. Il reste à le munir du produit défini par :

$$\begin{aligned} \otimes : M^{\otimes k} \times M^{\otimes \ell} &\rightarrow M^{\otimes(k+\ell)} \\ (m_1 \otimes \cdots \otimes m_k, n_1 \otimes \cdots \otimes n_\ell) &\mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_\ell \end{aligned} \quad (k, \ell \in \mathbb{N}).$$

Notons que M s'identifie au sous- A -module $\iota(M) = M^{\otimes 1}$ de $T(M)$.

L'algèbre tensorielle hérite de la propriété universelle suivante, qui exprime que c'est un objet libre (elle joue pour les algèbres le rôle des groupes [abéliens] libres pour les groupes [abéliens]).

Proposition. *Soit B une A -algèbre et $f : M \rightarrow B$ un morphisme de A -modules. Alors f se factorise à travers un unique morphisme de A -algèbres $\bar{f} : T(M) \rightarrow B$ selon le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota} & T(M) \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & B. \end{array}$$

Si B est engendrée par un sous-espace, cela a une conséquence pratique.

Corollaire. *Toute algèbre B engendrée en tant qu'algèbre par un sous-espace vectoriel $M \subset B$ peut être vue comme un quotient de l'algèbre tensorielle $T(M)$.*

On est au bord de la définition d'une algèbre présentée par générateurs et relations.

II.2) Cas d'un corps : $A = \mathbb{k}$

Ici, on considère le cas où l'anneau A sur lequel on effectue le produit tensoriel est un corps. Les A -modules M et N deviennent donc des $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels V et W .

La grande nouveauté vient du fait que l'on est maintenant autorisé à parler de bases et de dimension. Il devient alors facile de caractériser les éléments de $V \otimes W$.

Proposition. *Supposons que $(e_1, \dots, e_k)$ (resp. $(f_1, \dots, f_\ell)$) soit une base de V (resp. de W). Tout élément $x \in V \otimes W$ s'écrit de façon unique sous chacune des formes suivante :*

- $x = \sum_{i=1}^k e_i \otimes w_i$ avec $w_i \in W$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
 - $x = \sum_{j=1}^\ell v_j \otimes f_j$ avec $v_j \in V$ pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$.
 - $x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell \alpha_{i,j} (e_i \otimes f_j)$ avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{k}$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket, j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$.
- En particulier, $V \otimes W$ est un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension $(\dim V) \times (\dim W)$.

Exercice. Démontrer la proposition. L'étendre à des espaces de dimension infinie.

Supposons que $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ et $\psi : W_1 \rightarrow W_2$ soient deux applications $\mathbb{k}$ -linéaires. Pour $r = 1, 2$, soient $(e_i^r)_i$ une base de V_r et $(f_j^r)_j$ une base de W_r . Notons $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ les matrices respectives de φ et ψ dans des bases données. On ordonne la base $(e_i^r \otimes f_j^r)$ par ordre « lexicographique » : $(e_1^r \otimes f_1^r, e_1^r \otimes f_2^r, \dots, e_2^r \otimes f_1^r, e_2^r \otimes f_2^r, \dots)$. Alors la matrice de $\varphi \otimes \psi$ dans les bases $(e_i^r \otimes f_j^r)$ est une matrice qui peut s'écrire par blocs sous la forme :

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

Exercice. Vérifier que l'on a : $\text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$.

II.3) Exemples et applications

II.3.a) Quelques exemples sur $\mathbb{Z}$

Lemme. Soient m et n deux entiers relatifs, d leur PGCD. On a : $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soient a_i et b_i des entiers et $x = \sum_i a_i \otimes b_i$. On a, puisque le produit tensoriel porte sur $\mathbb{Z}$ et que $ak \otimes b = a \otimes kb$ pour tous $a, b, k \in \mathbb{Z}$:

$$x = \sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i (a_i b_i \otimes 1) = \left(\sum_i a_i b_i \right) \otimes 1 = 1 \otimes \left(\sum_i a_i b_i \right).$$

Cela prouve que l'application $p : \mathbb{Z} \rightarrow M, a \mapsto a \otimes 1$ est surjective². Soient alors u et v tels que $um + vn = d$. Si a et a' sont égaux modulo d , disons $a' = a + kd$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a' \otimes 1 = (a + kum + kvn) \otimes 1 = a \otimes 1 + kv \otimes n = a \otimes 1,$$

de sorte que le noyau de p contient $d\mathbb{Z}$ et que p induit une surjection $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow M$.

Inversement, la réduction modulo d passe au quotient par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'application³ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, (a, b) \mapsto ab$ est $\mathbb{Z}$ -bilinéaire, donc elle induit une application linéaire $M \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. L'image de $1 \otimes 1$ engendre $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Exercice. Soit M un $\mathbb{Z}$ -module fini. Montrer que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq (0)$. (Ainsi, le rang d'un groupe abélien de type fini N est la dimension du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N$.)

Exercice. Soient f et g deux polynômes à une variable X : décrire $\mathbb{C}[X]/(f) \otimes_{\mathbb{C}[X]} \mathbb{C}[X]/(g)$.

2. Autrement dit, on peut se contenter de considérer les tenseurs simples de la forme $a \otimes 1 = 1 \otimes a$.

3. On omet d'écrire des barres ou des points pour les classes modulo m, n ou d .

II.3.b) Produit tensoriel et dualité

Slogan. En dimension finie, dualité et produit tensoriel commutent.

Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{k}$. Étant données deux formes linéaires $\ell_1 \in V_1^*$ et $\ell_2 \in V_2^*$, on définit un élément du dual de $V_1 \otimes V_2$ sur les tenseurs simples : pour $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, on pose : $\varphi_{\ell_1, \ell_2}(v_1 \otimes v_2) = \ell_1(v_1)\ell_2(v_2)$. L'application $V_1^* \times V_2^* \rightarrow (V_1 \otimes V_2)^*$ est bilinéaire donc il existe une unique application $\Phi : V_1^* \otimes V_2^* \rightarrow (V_1 \otimes V_2)^*$ telle que $\Phi(\ell_1 \otimes \ell_2) = \varphi_{\ell_1, \ell_2}$ pour tous ℓ_1, ℓ_2 .

Lemme. Si V_1 et V_2 sont de dimension finie, $\Phi : V_1^* \otimes V_2^* \rightarrow (V_1 \otimes V_2)^*$ est un isomorphisme.

Démonstration. Pour $k = 1, 2$, soit $(v_i^{(k)})_{1 \leq i \leq n_k}$ une base de V_k , $(\ell_i^{(k)})$ sa base duale. Par construction, pour tout (i, j) , l'image $\Phi(\ell_i^{(1)} \otimes \ell_j^{(2)})$ est l'élément d'indice (i, j) de la base duale de $(v_i^{(1)} \otimes v_j^{(2)})_{i, j}$. $\square$

II.3.c) Produit tensoriel, dualité et morphismes

Proposition. Soient V, W deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{k}$. On suppose que V est de dimension finie. L'application suivante est un isomorphisme (naturel) :

$$\begin{aligned} \Phi : V^* \otimes_{\mathbb{k}} W &\xrightarrow{\sim} \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \\ \ell \otimes w &\longmapsto (v \mapsto \ell(v)w). \end{aligned}$$

Démonstration. L'application $V^* \times W \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$, $(\ell, w) \mapsto (v \mapsto \ell(v)w)$ est bilinéaire donc Φ est bien définie.

Supposons provisoirement que W soit aussi de dimension finie. Soient $\mathbf{v} = (v_j)_{1 \leq j \leq m}$ et $\mathbf{w} = (w_i)_{1 \leq i \leq n}$ des bases de V et W . Soit $(\ell_j)_{1 \leq j \leq m}$ la base duale de $\mathbf{v}$. Soit alors $\varphi \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ et (a_{ij}) la matrice de φ dans les bases $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$. Par définition, on a pour tout k :

$$\varphi(v_k) = \sum_{i=1}^n a_{ik} w_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{j=1}^m \delta_{j,k} w_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \ell_j(v_k) w_i.$$

Par suite, φ et $\Phi(\sum_{i,j} a_{ij} \ell_j \otimes w_i)$ prennent la même valeur sur la base $\mathbf{v}$, ce qui entraîne la surjectivité de Φ . On peut conclure par égalité des dimensions.

Revenons au cas général – on conserve les notations (v_j) et (ℓ_j) . Soit $\Psi : \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$, $\varphi \mapsto \sum_{j=1}^n \ell_j \otimes \varphi(v_j)$. On vérifie que Φ et Ψ sont réciproques l'un de l'autre. Pour $\varphi \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W)$ et $v = \sum_k x_k v_k \in V$, on a laborieusement :

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Psi(\varphi)(v) &= \Phi\left(\sum_{j=1}^m \ell_j \otimes \varphi(v_j)\right)(v) = \sum_{j=1}^m \ell_j(v) \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^m \ell_j\left(\sum_{k=1}^m x_k v_k\right) \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_k \ell_j(v_k) \varphi(v_j) = \sum_{k=1}^m x_k \varphi(v_k) = \varphi(v), \end{aligned}$$

et pour $\ell \in V^*$ et $w \in W$, on a, vu que (v_j) est la base duale de (ℓ_j) :

$$\Psi \circ \Phi(\ell \otimes w) = \sum_{j=1}^m \ell_j \otimes \Phi(\ell \otimes w)(v_j) = \sum_{j=1}^m \ell_j \otimes \ell(v_j)w = \sum_{j=1}^m \ell(v_j)\ell_j \otimes w = \ell \otimes w.$$

On peut conclure. $\square$

Exercice. Soient $\mathbf{v} = (v_j)_{1 \leq j \leq m}$ une base d'un espace vectoriel V et $(\ell_j)_{1 \leq j \leq m}$ sa base duale. Pour i, j fixés, interpréter $\ell_j \otimes v_i$ comme une matrice élémentaire.

Montrer que l'élément $\sum_{j=1}^m \ell_j \otimes v_j$ ne dépend pas du choix de $\mathbf{v}$. (On comparera un jour à la définition du Casimir dans une algèbre de Lie semi-simple.)

Exercice. Soit V un espace de dimension finie sur $\mathbb{k}$. On considère l'application linéaire définie par : $T : V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{k}$, $\ell \otimes v \mapsto \ell(v)$. Identifier la composée $\text{hom}_{\mathbb{k}}(V, V) \rightarrow V^* \otimes V \xrightarrow{T} \mathbb{k}$.

Exercice. Soient U, V et W trois espaces de dimension finie sur $\mathbb{k}$. La composition induit une application linéaire $\text{hom}_{\mathbb{k}}(V, W) \otimes \text{hom}_{\mathbb{k}}(U, V) \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{k}}(U, W)$. La décrire après identification comme une application $V^* \otimes W \otimes U^* \otimes V \rightarrow U^* \otimes W$.

Exercice. À l'aide de ce qui précède, justifier l'égalité $\text{tr}(fg) = \text{tr}(gf)$ lorsqu'elle a un sens.

Proposition. Soient U, V et W trois espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{k}$, avec V de dimension finie. On a naturellement :

$$\text{hom}_{\mathbb{k}}(U \otimes V, W) \simeq \text{hom}_{\mathbb{k}}(U, V^* \otimes W).$$

Démonstration. Si U est aussi de dimension finie, on peut utiliser ce qui précède :

$$\text{hom}_{\mathbb{k}}(U \otimes V, W) \simeq U^* \otimes V^* \otimes W \simeq \text{hom}_{\mathbb{k}}(U, V^* \otimes W).$$

Dans le cas général, on fixe une base (v_j) de V et sa base duale (ℓ_j) et on exhibe deux applications. À $\varphi \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(U \otimes V, W)$, on associe $\hat{\varphi} : u \mapsto \sum_{j=1}^m \ell_j \otimes \varphi(u \otimes v_j)$. À $\psi \in \text{hom}_{\mathbb{k}}(U, V^* \otimes W)$, on associe $\check{\psi} : u \otimes v \mapsto \psi(u)(v)$, où on a identifié $\psi(u) \in V^* \otimes W$ à un morphisme de V dans W . On vérifie que ces applications sont réciproques l'une de l'autre [...] et comme $\psi \mapsto \check{\psi}$ ne dépend d'aucun choix, la construction est naturelle. $\square$

II.3.d) Puissances alternées

Cette partie fera l'objet d'un exercice en TD.

II.3.e) Extension des scalaires

Soit B un deuxième anneau et $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. En pratique, φ est souvent injectif et B est donc un sur-anneau de A – cas particulier : une extension de corps.

Soit M un A -module. On fait de $B \otimes_A M$ un B -module en posant :

$$\forall b, b_1 \in B, \forall m \in M, \quad b(b_1 \otimes m) = (bb_1) \otimes m.$$

Cela a un sens : l'application $B \times (B \otimes_A M) \rightarrow (B \otimes_A M)$, $(b, b_1 \otimes m_1) \mapsto bb_1 \otimes m$ est bilinéaire (vérifier!), elle induit une application bilinéaire $B \otimes_A (B \otimes_A M) \rightarrow B \otimes_A M$.

Exercice. Vérifier que cela fait de $B \otimes_A M$ un B -module.

Exercice. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: quelle est la dimension de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ? et comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ? Par exemple, identifier $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.

Exercice. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$: munir $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$.

Exercice. Soient M un A -module, N un B -module. On fait de N un A -module noté ${}_A N$ en posant : $a \cdot n = \varphi(a)n$ pour $a \in A$, $n \in N$. Montrer que l'on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{hom}_A(M, {}_A N) \rightarrow \mathrm{hom}_B(B \otimes_A M, N),$$

Comparer à la réciprocity de Frobenius III.2).

Exercice. Soit I un idéal de A et M un A -module. On note IM le sous- A -module engendré par les produits am ($a \in I$, $m \in M$). Montrer que l'on a : $(A/I) \otimes_A M \simeq M/IM$.

II.3.f) Produit tensoriel d'algèbres

Soient $\mathbb{k}$ un corps, A et B deux $\mathbb{k}$ -algèbres. On rappelle que l'on peut faire de l'espace vectoriel $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ une algèbre en définissant le produit sur les tenseurs purs :

$$\forall a_1, a_2 \in A, \forall b_1, b_2 \in B, \quad (a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2).$$

Exercice. Vérifier que la définition a un sens, que $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ est associative (resp. unitaire, resp. commutative) si A et B le sont.

Exercice. Montrer que $\mathbb{C}[X_1] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_2] \simeq \mathbb{C}[X_1, X_2]$.

Exercice. Montrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Première version : $z \otimes w \mapsto (zw, z\bar{w})$. *Deuxième :* $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1)$.

Exercice. Soit $\mathbb{H}$ le corps des quaternions. Montrer que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II.3.g) Produits de caractères de groupes finis

Soit G un groupe fini. L'algèbre de groupe $\mathbb{C}G$ est l'algèbre sur $\mathbb{C}$ qui a pour base $(\delta_g)_{g \in G}$ et pour produit :

$$\forall g, g' \in G, \quad \delta_g \delta_{g'} = \delta_{gg'}.$$

C'est une algèbre associative (cela découle de l'associativité de G) et unitaire (le neutre est δ_e , où e est le neutre de G). Elle est commutative si et seulement si G est abélien. Son intérêt est le suivant : la donnée d'une représentation complexe $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est équivalente à la donnée d'une structure de $\mathbb{C}G$ -module sur $\mathbb{C}^n$. Si ρ est donné, on fait agir : $a = \sum a_g \delta_g \in \mathbb{C}G$ sur $v \in \mathbb{C}^n$ par : $a \cdot v = \sum a_g \rho(g)v$; si une structure de $\mathbb{C}G$ -module est donnée sur $\mathbb{C}^n$, on définit $\rho(g) : v \mapsto \delta_g \cdot v$ (inversible car $\delta_g \delta_{g^{-1}} = \delta_e$, qui agit comme l'identité).

Étant données deux représentations $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ et $\sigma : G \rightarrow \mathrm{GL}(W)$, on construit une représentation sur l'espace $V \otimes W$. C'est $\rho \otimes \sigma : G \rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes W)$, $g \mapsto \rho(g) \otimes \sigma(g)$. En termes de $\mathbb{C}G$ -modules, cela revient à dire que $\delta_g \cdot (v \otimes w) = (\delta_g \cdot v) \otimes (\delta_g \cdot w)$.

Exercice. Vérifier que l'on obtient bien une représentation ainsi. (Cela repose sur la compatibilité du produit tensoriel et de la composition, voir II.1.b.)

Proposition. Soit G un groupe fini, V et W deux représentations de dimension finie de G , χ_V et χ_W leurs caractères. Alors, le caractère de $V \otimes W$ est $\chi_V \chi_W$.

Démonstration. Soit $g \in G$. Fixons des bases de V et W , soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $\rho(g)$, B celle de $\sigma(g)$. Par II.1.b), la matrice de $\rho \otimes \sigma(g)$ dans la base produit tensoriel est la matrice qui, par blocs, s'écrit : $(a_{ij}B)_{i,j}$. Sa trace est : $\sum_{i=1}^{\dim(V)} a_{ii} \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) = \chi_V(g) \chi_W(g)$. $\square$

Exercice. Formons l'algèbre produit tensoriel $\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$. Soit $\Delta : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$, $\delta_g \mapsto \delta_g \otimes \delta_g$ ($g \in G$). Montrer que Δ est un morphisme d'algèbres (appelé *coproduct*).

Montrer à nouveau que $V \otimes W$ est naturellement un $\mathbb{C}G \otimes \mathbb{C}G$ -module à l'aide de Δ .

Exercice. Soient U , V et W des représentations d'un groupe (fini si on veut) G . Montrer que l'isomorphisme $\operatorname{hom}_{\mathbb{K}}(U \otimes V, W) \rightarrow \operatorname{hom}_{\mathbb{K}}(U, V^* \otimes W)$ est un morphisme de G -modules.

III. Cas non-commutatif

III.1) Construction

Lorsque l'anneau A est non-commutatif, le problème suivant peut se poser si on utilise la définition du produit tensoriel donné en II.1.a) :

$$(aa'm) \otimes n = m \otimes (aa'n) = m \otimes (a(a'n)) = (am) \otimes (a'n) = (a'am) \otimes n.$$

On perd donc toute l'information donnée par la non-commutativité de A et il y a de bonnes chances que le module construit soit trivial.

On donne donc une seconde définition du produit tensoriel lorsque A est non-commutatif (et les deux définitions coïncident si A est commutatif). Si M est un A -module à droite, (*i.e.* on a une action à droite de A sur M et on écrit $M \in \operatorname{Mod}_A$) et si N est un A -module à gauche (on écrit $N \in {}_A \operatorname{Mod}$), on définit

$$M \otimes_A N := \mathbb{Z}^{(M \times N)} \left/ \left\{ \begin{array}{l} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \quad (m \cdot a, n) - (m, a \cdot n), \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \quad | \quad a \in A, m, m_i \in M, n, n_i \in N \end{array} \right. \right\}$$

Il s'agit uniquement d'un groupe abélien (vu comme quotient de groupe abélien). Cependant, il est cette fois impossible de donner une structure de A -module convenable à $M \otimes_A N$. Pour munir cet objet d'une structure de module, il faut recourir à des hypothèses de bi-module (cf. III.2)).

Ayant ceci en tête, on peut énoncer ceci :

Slogan. La quasi-totalité des résultats ayant été obtenus lorsque A est commutatif qui ne font pas intervenir la structure de A -module de $M \otimes_A N$ restent vrais dans le cas non-commutatif.

On peut ainsi énoncer toutes les propriétés impliquant de la A -linéarité en ne considérant que les propriétés de morphismes de groupes sous-jacents. Il faut bien entendu que les résultats en question aient un sens. Ainsi, on ne peut pas écrire quelque chose comme $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$ car N (resp. M) n'est pas un A -module à droite (resp. à gauche). Par contre l'associativité du produit tensoriel reste valable.

III.2) Induction pour les groupes finis

Soient G un groupe fini, H un sous-groupe de G . L'algèbre $\mathbb{C}H$ est naturellement une sous-algèbre de $\mathbb{C}G$. Aussi, tout $\mathbb{C}G$ -module V devient naturellement un $\mathbb{C}H$ -module – appelé module restreint, noté éventuellement $\text{Res}_H^G V$. En sens inverse, si W est un $\mathbb{C}H$ -module, on forme un $\mathbb{C}G$ -module, appelé *induit de W* et noté $\text{Ind}_G^H W$ ainsi :

$$\text{Ind}_G^H W = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W.$$

Exercice. Montrer que $\mathbb{C}G$ est un $\mathbb{C}H$ -module à droite libre de rang $|G/H|$ (choisir une famille de représentants (g_i) de G/H dans G et montrer que (δ_{g_i}) est une base). En déduire que $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$ est un espace vectoriel de dimension $|G/H| \dim W$.

Proposition (Réciprocité de Frobenius). *Soient V un $\mathbb{C}G$ -module et W un $\mathbb{C}H$ -module. On a naturellement :*

$$\text{hom}_{\mathbb{C}G}(\text{Ind}_G^H W, V) \simeq \text{hom}_{\mathbb{C}H}(W, \text{Res}_H^G V).$$

Exercice. Le démontrer.

Exercice (Utilisation d'un bimodule). Cet exercice étend la situation précédente. Il n'est pas clair qu'elle produise des choses intéressantes, et pourtant...

Soient A et B deux anneaux. Soit M un (B, A) -bimodule, c'est-à-dire un B -module à gauche, un A -module à droite tel que l'on ait : $b(ma) = (bm)a$ pour tous $b \in B$, $m \in M$, $a \in A$ (on écrit $M \in {}_B\text{Mod}_A$).

Alors, pour tout A -module à gauche N , on forme le produit tensoriel $M \otimes_A N$: montrer que c'est naturellement un B -module à gauche et énoncer de bonnes propriétés sur les morphismes. Autrement dit, $\otimes_A$ nous fournit un foncteur ${}_B\text{Mod}_A \times_A \text{Mod} \rightarrow {}_B\text{Mod}$.

Référence : [2].

Bibliographie

- [1] Patrick POLO : Algèbre et théorie de galois. Chapitre X d'un cours de M1 ; disponible en ligne : <http://www.math.jussieu.fr/~polo/M1/>, 2008.
- [2] Jean-Pierre SERRE : *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised édition, 1978.