Algèbres de Lie et Représentations, 1ère partie (Cours Fondamental du M2 Recherche Lyon)

Michaël Bulois

Table des matières

I. Algèbres de Lie, Notions Elémentaires (sic)

cadre : sur un corps $\mathbb{K}$.

I.1. Définitions et exemples

Definition de la notion d'algèbre de Lie (AL).
Exemples divers sur les matrices ($\mathfrak{sl}_2$, $\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{t}_n$ (trigonales sup), $\mathfrak{u}_n$ (trig strict sup) ...), AL de Heisenberg, AL de Weyl.

I.2. Morphismes et sous-structures

Morphismes, idéaux, sous-AL, AL quotient, noyaux, images, somme directe d'AL.

I.3. Représentations

I.3.a) Généralités

Définition d'une représentation (utilisation du terme équivalent $\mathfrak{g}$-module).
Exemples : Respréséntations de $\mathfrak{g}$ abélienne $\Leftrightarrow$ élément de $\mathfrak{g}^*$, représentation naturelle de $\mathfrak{sl}_n$.
Représentation adjointe. Exemple : $\mathfrak{sl}_2$.
Morphisme de rep, sous-rep, rep quotient, rep irréductible (emploi du terme équivalent simple), somme directe de rep, rep semisimple, Exemple de rep non-semi-simples.

I.3.b) Représentations de $\mathfrak{sl}_2$

Formules brutes de la représentation de dim r. (avec $f(v_i) = v_{i+1}$, $e(v_i) = \mu_i v_{i-1}$)
Thm de classification des rep simples de $\mathfrak{sl}_2$.
Annonce de semi-simplicité des rep de dim finie $\mathfrak{sl}_2$. Démo reportée au cas d'une AL semi-simple quelconque.
Corollaires (dont $Ker(e) \subset \sum_{i \geqslant 0} V_i(h)$, où $V_i(h)$ est l'espace propre de l'action de h associée à la valeur propre i).

I.3.c) Drapeaux et Jordan Hölder

Définitions de drapeaux, drapeaux complets et de suites de Jordan Hölder d'une rep (pas de thm).

I.4. Nilpotence et Résolubilité

Convention à partir de maintenant : $\dim \mathfrak{g} < \infty$**, char** $\mathbb{K}$**=0 et peu après :** $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$**, dim de toute rep** $< \infty$**.**

I.4.a) AL Nilpotentes

Definition à partir de la suite centrale descendante.
Equivalences faciles (ex : drapeau d'idéaux tq $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$).
Sous-AL et AL quotient d'une AL nilpotente également nilpotentes. $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.
Lemme d'Engel : Si $\mathfrak{g}$ est une ss-AL de $\mathfrak{gl}(V)$ dont tous les éléments sont nilpotents alors $V^{\mathfrak{g}} := \{v \in V \mid \mathfrak{g} \cdot v = \{0\}\}$ est non-nul.
Thm d'Engel : Si (V, σ) rep de $\mathfrak{g}$ telle que $\sigma(x)$ nilp pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Alors il existe un drapeau $(V_i)_i$ tq $\mathfrak{g} \cdot V_i \subset V_{i-1}$.
Corollaire : $\mathfrak{g}$ nilp $\Leftrightarrow$ ad$x$ nilp $\forall x \in \mathfrak{g}$.

I.4.b) AL Resolubles

Def à partir de suite dérivée de $\mathfrak{g}$.
$\mathfrak{g}$ resoluble $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ résolubles.
Lemme de Lie : Si V rep de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{g}$, les $\mathfrak{a}$-espaces de poids sont $\mathfrak{g}$-stables.
Thm de Lie : Si V rep de $\mathfrak{g}$ resoluble, alors il existe un drapeau $(V_i)_i$ tq $\mathfrak{g} \cdot V_i \subset V_i$.
Corollaire : rep simple d'une AL resoluble sont de dim 1, $\mathfrak{g}$ resoluble $\Leftrightarrow$ $D(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ nilpotente.

I.4.c) Critère de Cartan

Si (V, σ) rep de $\mathfrak{g}$, definition de β_σ : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & tr(xy) \end{array} \right.$ forme bilinéaire symétrique $\mathfrak{g}$-invariante.
Thm (Critère de Cartan : $\sigma(\mathfrak{g})$ res $\Leftrightarrow$ $\beta_\sigma(D(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\beta_\sigma(D(\mathfrak{g}), D(\mathfrak{g})) = \{0\}$.

I.4.d) Radical et Forme de Killing

Def forme de Killing $L_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$. Si $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{g}$: $L_\mathfrak{a} = (L_\mathfrak{g})_{|\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$.
Corollaire critère de Cartan : $\mathfrak{g}$ res $\Leftrightarrow$ $\beta_\sigma(D(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\beta_\sigma(D(\mathfrak{g}), D(\mathfrak{g})) = \{0\}$.
Definition (et existence) du radical d'une algèbre de Lie.
Prop : $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ est le plus petit idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ tel que $\operatorname{rad}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$.
Lemme : $\operatorname{rad} \mathfrak{g}$ est l'orthogonal de $D(\mathfrak{g})$ par rapport à L.
Corollaire : Si $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{g}$ alors $\operatorname{rad} \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cap \operatorname{rad} \mathfrak{g}$.

II. Algèbres de Lie semi-simples.

II.1. Definitions et premières propriétés

Definition d'algèbre de Lie simple (pas d'idéaux non-triviaux et $\dim \mathfrak{g} > 1$). Def d'AL semi-simple via $\operatorname{rad} \mathfrak{g} = \{0\}$.
Exemples et contrexemples ($\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{so}_n$, $\mathfrak{t}_n$). Démo pour $\mathfrak{sl}$ repoussée en TD.
Caractérisation des AL semi-simples : $\mathfrak{g}$ ss $\Leftrightarrow$ L non-dégénérée $\Leftrightarrow$ Le seul idéal abélien de $\mathfrak{g}$ est $\{0\}$.
Corollaires et conséquences : simple $\Rightarrow$ semi-simple, sous-algèbres et quotients sont semi-simples.
Prop : équivalence entre $\mathfrak{g}$ semi-simple et $\mathfrak{g}$ somme directe de simples.
Représentation adjointe fidèle, centre nul, $\mathfrak{g} = D(\mathfrak{g})$.

II.2. Semisimplicité des représentations.

II.2.a) Généralités supplémentaires sur les représentations

A priori $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple ici
Notations : $\operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V, W) = \{\text{morphismes de rep } V \to W\}$; $\operatorname{End}_\mathfrak{g}(V) := \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V, V)$; $\operatorname{Hom}_\mathbb{K}(V, W) := \{\text{appl } \mathbb{K}\text{-linéaires } V \to W\}$; $\mathfrak{gl}_\mathbb{K}(V) := \operatorname{Hom}_\mathbb{K}(V, V)$.
On note $\mathcal{P}$ un ensemble d'indices en bijection avec les $\mathfrak{g}$-modules simples. Si $\lambda \in \mathcal{P}$ alors V_λ est le module simple correspondant.
Lemme de Schur.
Théorème de Jordan Hölder (juste démontré pour les représentations semi-simples avec la formule : $mult_V(V_\lambda) = \dim_\mathbb{K} \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V_\lambda, V) = \dim_\mathbb{K} \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V, V_\lambda)$).
Def de la structure de $\mathfrak{g}$-module sur $\operatorname{Hom}_\mathbb{K}(V, W)$.

Def de dérivation : $\mathfrak{g} \to V$ pour un $\mathfrak{g}$-module V. Notation : $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}, V)$ et dans le cas de la rep adjointe : $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$. Dérivations intérieures, notation : $\mathfrak{ider}$.

II.2.b) Le cas $\mathfrak{g}$ semi-simple

Thm (Lemme de Withehead) : $\mathfrak{der}(\mathfrak{g}, V) = \mathfrak{ider}(\mathfrak{g}, V)$. (démo à base délément de Casimir de la représentation V).
Thm de Weyl : $\mathfrak{g}$ semi-simple $\Leftrightarrow$ Toutes les représentations de $\mathfrak{g}$ sont semi-simples.

II.3. Décomposition de Jordan et sous-algèbres de Cartan (SAC)

II.3.a) Decomposition De Jordan

Rappels sur la décomposition de Dunford $x = x_s + x_n$ (pour éviter les mélanges, Dunford désigne le résultat d'algèbre linéaire standard tandis que Jordan sera réservé aux AL).
Notations : Si $\mu \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathfrak{gl}(V)$, on note $V^{(\mu)}(x)$ (resp. $V_\mu(x)$) le sous-espace caractéristique (resp. propre) de x dans V associé à la valeur propre μ. On généralise à $V_\mu(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a}$ s.e.v. de $\mathfrak{gl}(V)$ (ou de $\mathfrak{g}$ si V est une rep de $\mathfrak{g}$) et $\mu \in \mathfrak{a}^*$. Ainsi, $\mathfrak{g}^{(\mu)}(\mathfrak{h})$ et $\mathfrak{g}_\mu(\mathfrak{h})$ sont définis via la rep adjointe.
Lemme : $[\mathfrak{g}^{(\lambda)}, \mathfrak{g}^{(mu)}] \subset \mathfrak{g}^{(\lambda+\mu)}$, $[\mathfrak{g}_{(\lambda)}, \mathfrak{g}_{(mu)}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda+\mu)}$.
Décomposition de Jordan pour $g \in \mathfrak{g}$ via $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g))_s = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g_s)$ et $(\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g))_n = \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(g_n)$.
Prop : Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ alors sa dec de Jordan coincide avec sa dec de Dunford (démo en TD).

II.3.b) Sous-algèbres diagonalisables

Def : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ diagonalisable si tout élément de $\mathfrak{h}$ est $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}$-semi-simple.
Lemme : $\mathfrak{h}$ diag $\Rightarrow$ $\mathfrak{h}$ abélienne.
Si $\mathfrak{h}$ diag alors $\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha(\mathfrak{h})$.
$L_{|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta} = \{0\}$ si $\alpha \neq -\beta$.
$L_{|\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ non-dégénérée.
Prop : $\mathfrak{h}$ diag $\Rightarrow$ $\mathfrak{c}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}_0(\mathfrak{h})) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}_0(\mathfrak{h})] = 0\}$ diagonalisable.

II.3.c) SAC

Prop : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ diagonalisable maximale$\Leftrightarrow$ $\mathfrak{h}$ diagonalisable et $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0(\mathfrak{h})$.
Def : une telle algèbre est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.
Corollaire : $L_{|\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ non-dégénérée.

II.4. Racines

II.4.a) Definitions et premières propriétés

Def d'une racine. Ensemble des racines noté $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.
$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta}$. $\Delta = -\Delta$.
isomorphisme de Killing. Def de h_α via $\alpha(\cdot) = L(h_\alpha, \cdot)$. Forme bilinéaire induite sur $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^*$ notée $< \cdot, \cdot >$.
$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{K} h_\alpha$, $\alpha(h_\alpha) \neq 0$.
Def de $H_\alpha = \frac{2}{L(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha$ coracine. Existence d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (mot non-prononcé) $(e_\alpha, H_\alpha, f_\alpha)$.
$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. $\mathfrak{s}_\alpha := \mathfrak{g}_\alpha \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$.
$L(h, h') = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(h)\alpha(h')$ et $< \beta, \gamma >= \sum_{\alpha \in \Delta} < \alpha, \beta >< \alpha, \gamma >$.

II.4.b) α-chaines

Def $a_{\beta\alpha} := \beta(H_\alpha) = 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}$.
Prop : $\forall \alpha, \beta \in \Delta, a_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$; $\{t \in \mathbb{Z} \,|\, \beta + t\alpha \in \Delta \cup \{0\}\} = [\![-p, q]\!]$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ et $p - q = a_{\beta\alpha}$; $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$.
Def : Les $a_{\beta\alpha}$ sont appelés les entiers de Cartan.
Prop : Si $\alpha \in \Delta$ alors $\mathbb{K}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$. Si $\alpha, \beta, \beta + \alpha \in \Delta$ alors $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

II.4.c) Réflexions

Def d'une reflexion dans un e.v. quelconque V via ses espaces propres (1 de mult $n-1$ et -1 de mult 1).
Caractérisation par $\exists a \in V, \exists! a^\vee \in V^*$ tq $a^\vee(x) = 2$ et $s = s_{a,a^\vee} : x \mapsto x - a^\vee(x)a$.
Pour les AL, on s'intéresse à $V = \mathfrak{h}^*$ et à s_{α,H_α} pour $\alpha \in \Delta$.
Lemme : $s_{\alpha,H_\alpha}(\Delta) = \Delta$.

II.4.d) Système de racines

Cadre : $char\mathbb{K} = 0$ **mais pas nécéssairement** $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$**. On a un** $\mathbb{K}$**-e.v.** V **de dim finie**.
Def1 d'un système de racines $\Delta \subset V$ rangée par axiomes : (ceux donnés dans le chap 18 de Tauvel et Yu)
(R1) Δ fini, engendre V, $0 \notin \Delta$.
(R2) $\forall \alpha \in \Delta$, $\exists \alpha^\vee \in V^*$ tq $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ et $s_{\alpha,\alpha^\vee}(\Delta) = \Delta$.
(R3) : $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \alpha^\vee(\beta) \in \mathbb{Z}$.
De plus, le système est dit réduit si
(R4) : $\mathbb{K}\alpha \cap \Delta = \{\pm\alpha\}$.
Mention (sans démo) du fait que les $\alpha^\vee$ sont uniquement déterminés par (R2).
Thm : $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est un système de racine réduit de $\mathfrak{h}^*$.
Def2 (alternative) d'un syst de racines dans le cas où V est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $(\cdot|\cdot)$.
(R2') remplace (R2) où α est supposé non-isotrope et $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ est remplacé par s_α, la reflexion orthogonale qui envoie α sur $-\alpha$.
(R3') remplace (R3) où $\alpha^\vee(\beta)$ est remplacé par $\frac{(\beta|\alpha)}{(\alpha|\alpha)}$.
Demo de Def2$\Rightarrow$ Def1. L'autre sens étant l'objet d'un TD.
La def1 est annoncée comme étant la seule définition "officielle" à garder en tête.

II.5. Systèmes de Racines et algèbre de Lie

II.5.a) Exemples

Description du système de racine dans les cas $_2$ et $_3$ avec dessin des systèmes de racines (l'existence d'une notion d'angle étant suggérée par la forme bilinéaire de la def2 de système de racine).
Dessin des systèmes de racine B_2 et G_2 (sans démonstration aucune. Dans l'unique but d'avoir des exemple à se mettre sous la dent.)

II.5.b) Invariance de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$

Def de $exp(\mathrm{ad}x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ nilpotent.
Lemme : $exp(\mathrm{ad}x)$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$.
Definition du groupe $Aut_e(\mathfrak{g})$ des automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$.
Prop : 2 SAC sont conjuguées par un élément de $Aut_e(\mathfrak{g})$.

Demo repose sur l'étude de $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathfrak{g}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathfrak{g}_{\alpha_n} \times \mathfrak{h} & \to & \mathfrak{g} \\ (x_1, \ldots, x_n, h) & \mapsto & exp(x_1) \circ \cdots \circ exp(x_n)(h) \end{array} \right.$. On montre que sa différentielle est surjective en un point $(0, \ldots, 0, h)$ avec $h \in \mathfrak{h}_{reg} := \mathfrak{h} \setminus \bigcup_i Ker\alpha_i$. On admet un lemme de géo alg qui annonce si U est un ouvert non-vide du domaine d'un tel f alors $f(U)$ contient un ouvert non-vide du codomaine de f.
Definition de systèmes de racines isomorphes (existence d'un isomorphisme entre espaces vectoriels ambiants qui envoie Δ sur Δ' et qui préserve les entiers de Cartan).
Corollaire de la prop : $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ne dépend pas de $\mathfrak{g}$ (à iso près).
Pour info, énoncé du thm non démontré suivant : 1) $(\Delta(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{h}_1) \cong \Delta(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_2)) \Rightarrow (\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2)$. 2) Si Δ est un syst de racines abstrait, il existe $\mathfrak{g}$ semi-simple tq pour $\mathfrak{h}$ SAC de $\mathfrak{g}$, on ait $\Delta \cong \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.
Conséquence : Bijection entre $\{$syst de racines$\}/\sim \leftrightarrow \{$alg de Lie ss de dim finie$\}/\sim$.

II.5.c) $\mathbb{K} \to \mathbb{Q} (\to \mathbb{R})$

Lemme : $\forall \alpha, \beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), < \alpha, \beta > \in \mathbb{Q}$.
Lemme : $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\Delta = \dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}^*$.
Def : $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}\Delta$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathfrak{h} | \Delta(x) \subset \mathbb{Q}\}$.
Corollaire : $\Delta^\vee \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$. On a $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ syst de racine de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = (\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}})^*$. La situation sur $\mathbb{K}$ s'obtient par extension des scalaires de la situation sur $\mathbb{Q}$.
Remarque : On peut aussi étendre les scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ pour se retrouver sur un espace réel (d'où des notions de cosinus d'angles entre racines plus clairement envisageables).
Exemple d'application : à partir de $x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Q},reg}$, on pose $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta | \alpha(x) > 0\}$ et $\Delta^- = -\Delta^+$. Alors Δ^+ est une partie fermée de Δ et $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$.
Def : Réseau des racines (noté $\mathcal{Q}$). Réseau des poids entiers (noté $\mathcal{P}$). Si choix $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta$: Ensemble des poids entiers dominants (noté $\mathcal{P}^+$).

II.5.d) Sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ liées aux syst de racines

Def : Partie fermée d'un système de racine.
Prop : $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ sous-alg de Lie contenant $\mathfrak{h} \Leftrightarrow \exists R \subset \Delta$ fermé tq $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$.
Exemple/def : Avec un choix $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$, on définit les sous-algèbres de Borel comme $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. Résolubilité de $\mathfrak{b}$. Décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Illustration via $\mathfrak{sl}$.

II.6. Représentations simples des AL semi-simples

II.6.a) Algèbre enveloppante et PBW

Cadre : $\mathfrak{g}$ A.L. de dim $< \infty$ quelconque sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.
Def de $U(\mathfrak{g})$ par quotient de l'algèbre tensorielle.
Propriété universelle : si A associative, tout morphisme d'alg de Lie $\mathfrak{g} \to A$ se factorise à travers un morphisme d'alg assoc $U(\mathfrak{g}) \to A$.
Equivalence entre représentations de $\mathfrak{g}$ et de $U(\mathfrak{g})$.
Action adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $U(\mathfrak{g})$. Filtration de $U(\mathfrak{g})$ par les sous-modules U_n.
Algèbre symétrique, propriété universelle, action de $\mathfrak{g}$ sur $S(\mathfrak{g})$.
Thm PBW sous la forme : iso de $\mathfrak{g}$-modules $U_n/U_{n-1} \xrightarrow{\sim} S^n(\mathfrak{g})$.
Cor : base PBW et injectivité de $\mathfrak{g} \hookrightarrow U(\mathfrak{g})$.
Exemples de calculs dans $U(\mathfrak{sl}_2)$.

II.6.b) Modules et poids

Cadre jusqu'à la fin : $\mathfrak{g}$ semisimple, $\mathbb{K} = \overline{K}$, $car\mathbb{K} = 0$, $\dim \mathfrak{g} < \infty$, V rep de $\mathfrak{g}$.
Lemme : L'action d'un élément semi-simple $h \in \mathfrak{g}$ est diagonalisable si $dimV < \infty$.
Def : espace de poids, poids d'une représentation, espaces radiciels (réparation d'un oubli).
Rajout d'un choix de dec $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$
Prop : Un module V simple de dimension finie a un plus haut poids entier dominant Λ et $\dim V_\Lambda = 1$.
Def : Ordre sur les poids $\mu \leqslant \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \mathbb{N}\Delta^+$
Cor : Existence d'une application $\{\mathfrak{g}$-modules simples de dim $< \infty\}/\sim \to \mathcal{P}^+$.

II.6.c) Modules de Verma

Def : Vecteurs primitifs
Prop : Si V a un vecteur primitif de poids Λ alors : a) $V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$; b) $V_\mu \neq \emptyset \Leftrightarrow \mu \leqslant \lambda$; c) $\dim V_\mu < \infty$ et $\dim V_\Lambda = 1$.
Def du module de Verma $M(\lambda) := U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{K}_\lambda$.
Base de $M(\lambda)$ donnée par $U(\mathfrak{n}^-)$, propreté universelle vis à vis des rep avec vecteur primitif vecteurs primitifs.
Unicité d'un quotient simple $L(\lambda)$.
Corollaire : si V simple de dim finie de plus haut poids Λ alors $V \cong L(\Lambda)$.

II.6.d) Modules de Verma de plus haut poids entier dominant

Lemme admis sur les syst de racines : Si $\lambda \in \mathcal{P}$, il existe $w \in W$ tel que $\lambda \in \mathcal{P}^+$.
Lemme : Si $\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, V est somme de $\mathfrak{s}_\alpha$ modules simples de dimension finie, alors $\dim V_{w\lambda} = \dim V_\lambda$.
Prop : $\forall \lambda \in P^+$, $\dim L(\lambda) < \infty$.
Corollaire : classification des $\mathfrak{g}$-modules simples de dim finie.

Points de passages pour la suite sur les systèmes de racine :

En gras, ce qui me parait indispensable
Dire ce qu'est une base d'un système de racines et montrer les bonnes propriétés dessus.
Parler de l'angle entre deux racines (par exemple avec les entiers de Cartan $a_{\beta\alpha} a_{\alpha\beta} = 4cos^2(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$).
Faire la classification en dimension 2.
Parler du groupe de Weyl et expliquer ses actions transitives (sur les bases ou les chambres fondamentale).
Les faire travailler de facon combinatoire sur des exemples de systèmes de racines.
C'est à peu près tout