Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n° 1

Exercice 1 (Si ce n'est pas déjà fait)**.** Montrer tout ce qui a été affirmé sans démonstration dans le cours. (*i.e.* Vérifier les remarques, les propositions, montrer que les exemples d'A.L. en sont bien...)

Exercice 2. Comprendre la phrase suivante :
"Les idéaux sont les sous-représentations de la représentation adjointe".

Exercice 3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On définit

$$D(\mathfrak{g}) := Vect([x,y]|x,y \in \mathfrak{g})$$

.

(i) Montrer que $\mathfrak{g}/D(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie bien définie.
(ii) Soit (V,ρ) une représentation de $\mathfrak{g}$ de dimension 1.
Montrer que $\rho(D(\mathfrak{g})) = 0$.
(iii) Identifier l'ensemble des représentations de $\mathfrak{g}$ de dimension 1.
(iv) Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, montrer que $D(\mathfrak{h})$ est aussi un idéal de $\mathfrak{g}$.

Exercice 4. Déterminer (à isomorphisme près) toutes les représentations de dimension 2 de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1.
Lesquelles sont irréductibles ? semisimples ?

Exercice 5. Soit (V,ρ) une représentation de $\mathfrak{g}$. Soit $\rho', \rho'' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V^*)$ définis par

$$\forall g \in \mathfrak{g}, \forall x \in V : \ \rho'(g)(f)(x) = f(\rho(g)(x)) \quad \rho''(g)(f)(x) = -f(\rho(g)(x)).$$

Montrer que ρ'' est une représentation de $\mathfrak{g}$ tandis que ρ' n'en est pas une en général.

Exercice 6. Lorsque l'ensemble d'indice I est fini, décrire une réalisation de l'algèbre de Lie de Heisenberg comme algèbre de matrices (*i.e.* comme sous-algèbre de $\mathfrak{gl}_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 7. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $Aut(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ l'ensemble des automorphismes (de Lie) de $\mathfrak{g}$. Pour $x \in \mathfrak{g}$ ad-nilpotent (*i.e.* tel que $ad\, x$ est nilpotent), on définit $exp(x) \in Aut(g)$

$$exp(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ad\, x)^n}{n!}.$$

Soit $Aut^e(\mathfrak{g})$ le sous-groupe de $Aut(\mathfrak{g})$ engendré par $\{exp(x) | x \in \mathfrak{g}, x \text{ ad-nilpotent}\}$. Montrer que $Aut^e(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe normal de $Aut(\mathfrak{g})$

Exercice 8. Développer dans $\mathfrak{gl}_n$ l'expression suivante :

$$(ad\, x)^n(y)$$

.