Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n° 2

Exercice 1.

Exercice 2. Montrer que $\mathfrak{t}_n$ est résoluble et que $\mathfrak{u}_n$ est nilpotente.

Exercice 3. Montrer que $\mathfrak{sl}_2$ est semisimple.

Exercice 4 (Classification des algèbres de Lie de petite dimension)**.**

1. Exhiber une algèbre de Lie de dimension 2 résoluble non-abélienne.
2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 2.
   (a) Montrer que $\dim D(\mathfrak{g}) \leqslant 1$ et que $\mathfrak{g}$ est résoluble.
   (b) Montrer que $\mathfrak{g}$ est soit abélienne soit isomorphe à l'algèbre de la question 1.
3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie non abélienne de dimension 3.
   (a) Soit $x \in D(\mathfrak{g})$. Montrer que $\operatorname{ad} x$ est soit nilpotent soit possède trois valeurs propres distinctes.
   (b) Montrer que soit $\mathfrak{g}$ est résoluble soit il existe une base (x, y, z) de $\mathfrak{g}$ telle que $x \in D(\mathfrak{g})$, $[x, y] = 2y$ et $[x, z] = -2z$.
   (c) Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas résoluble et soit (x, y, z) une base de $\mathfrak{g}$ comme dans 3b). Montrer que
      i. $[x, [y, z]] = 0$,
      ii. $[\Bbbk y, \Bbbk z] = \Bbbk x$,
      iii. $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.
   (d) A partir de maintenant, on suppose que $\mathfrak{g}$ est résoluble. Montrer que $D(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension 1 ou 2.
   (e) On suppose que $\dim D(\mathfrak{g}) = 1$. Soit $z \in D(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$ et $x, y \in \mathfrak{g} \setminus D(\mathfrak{g})$ choisis de sorte que (x, y, z) soit une base de $\mathfrak{g}$. On pose $[y, z] = \alpha x$, $[y, x] = \beta x$ et $[z, x] = \gamma x$.

i. Calculer $\begin{vmatrix} -\gamma & \alpha & 0 \\ -\beta & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & \gamma \end{vmatrix}$ puis montrer que le centre de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} | [x, \mathfrak{g}] = 0\}$, est de dimension 1.

ii. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = D(\mathfrak{g})$, montrer que $\mathfrak{g}$ est isomorphe à une algèbre de Heisenberg.

iii. Si $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq D(\mathfrak{g})$, montrer que $\mathfrak{g}$ est somme directe de son centre avec une algèbre de Lie isomorphe à celle de la question 1.

(f) On considère maintenant $A := \{\text{algèbres de Lie } \mathfrak{g} | \dim D(\mathfrak{g}) = 2\}/\sim$. Trouver un lien entre A et des représentations de l'algèbre de Lie $\mathbb{k}$ sur un espace de dimension 2. En particulier, montrer que A est infini.