Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n° 3

Exercice 1. Montrer que $\mathfrak{sl}_n$ est une algèbre de Lie semisimple.
On pourra prendre pour base de $_n$ la famille formée des éléments de la forme
- $E_{i,j}$ pour $i \neq j$,
- $E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.

et calculer la forme de Killing dans cette base.

Exercice 2.
1. Soit $x \in \mathfrak{g} := \mathfrak{gl}_n$ diagonalisable. Montrer que $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ l'est aussi.
2. Rappelons que le résultat de 1 est valable si l'on remplace diagonalisable par nilpotent. Montrer que, si $x = x_s + x_n$ est la décomposition de Dunford de $x \in \mathfrak{gl}_n$, alors $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_s) + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x_n)$ est la décomposition de Dunford de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$.

Exercice 3. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{gl}(V)$. Soit $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ une décomposition de V en $\mathfrak{g}$-modules simples. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, on pose $\mathfrak{g}_{W_i} := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W_i) \subset W_i, tr(x_{|W}) = 0\}$. Enfin, on pose $\mathfrak{h} := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid [x, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$ et $\mathfrak{t} := \mathfrak{h} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \mathfrak{g}_{W_i}$.

1. Montrer que $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ et que $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{t}$.
2. Soit $\mathfrak{a}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing $L_{\mathfrak{t}}$.
   (a) Montrer que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}$ des idéaux de $\mathfrak{g}$ et que $(L_{\mathfrak{t}})_{|\mathfrak{a}\cap\mathfrak{g}} = 0$.
   (b) En déduire que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g} = 0$ puis que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ en tant qu'espace vectoriel.
   (c) Soit $a \in \mathfrak{a}$, montrer que $[\mathfrak{g}, a] = 0$ et en déduire que $a_{|W_i}$ est un endomorphisme du $\mathfrak{g}$-module W_i.
   (d) Montrer que $a_{|W_i} = 0$ puis que $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$.

3. (a) Soit $x \in \mathfrak{g}_{W_i}$. Montrer que $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_{W_i}$.
   (b) Soit $x \in \mathfrak{h}$. En utilisant l'exercice 2, montrer que $\mathfrak{g}$ est stable par $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)}(x_s)$.
   (c) En déduire que, si $x \in \mathfrak{g}$ alors $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$.
4. Montrer qu'un élement $x \in \mathfrak{g}$ est $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-semisimple (resp. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-nilpotent) si et seulement si il est diagonalisable (resp. nilpotent) comme élément de $\mathfrak{gl}(V)$.