Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n^o 4

Exercice 1. Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ et supposons que V soit un $\mathfrak{g}$-module simple.

1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathfrak{a} \subset \mathbb{k}Id$. (Indication : Schur)
2. Si on suppose de plus que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, montrer qu'alors $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.
3. Montrer que $\mathfrak{sl}_n$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Exercice 2. Ici $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

1. Montrer que $\mathfrak{h} := \{\text{matrices diagonales de } \mathfrak{sl}_n\}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.
2. Montrer que $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j\}$ où $\epsilon_i(h) := h_{i,i}$
3. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, soit $\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j$ et soit $\tau \in S_n$ la transposition (ij). Montrer que $s_\alpha(\epsilon_k - \epsilon_l) = \epsilon_{\tau(k)} - \epsilon_{\tau(l)}$.
4. En déduire que $W := \langle s_\alpha | \alpha \in \Delta \rangle \subset GL(\mathfrak{h})$ est isomorphe au groupe de permutations S_n.

Exercice 3. Soit $\Delta \subset V$ un système de racine. On défini une application $V \times V \to \mathbb{k}$ via

$$(x, y) \mapsto (x|y) := \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha^\vee(x)\alpha^\vee(y).$$

1. Montrer que $(.|.)$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que, si $\alpha \in \Delta$, on a $(\alpha|\alpha) \neq 0$.
3. Soit W le groupe engendré par les $s_{\alpha,\alpha^\vee}$ $(\alpha \in \Delta)$ et soit $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ une décomposition en W-module simples
   (a) Montrer que, pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a soit $\mathbb{k}\alpha \subset V_i$, soit $Ker(\alpha^\vee) \supset V_i$.

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in \Delta$, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha \in V_i$.

(c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\alpha \in \Delta$ tel que $\alpha \in V_i$.

4. On admet que $\Delta^\vee$ est un système de racines de V^* avec $(\alpha^\vee)^\vee = \alpha$ et que $s_{\alpha^\vee,\alpha} \in GL(V^*)$ est l'application transposée de $s_{\alpha,\alpha^\vee}$. Montrer que $\forall x, y \in V \times V$, on a $(s_{\alpha,\alpha^\vee}(x)|s_{\alpha,\alpha^\vee}(y)) = (x|y)$.
5. Montrer que $V^\perp := \{x \in V|(x, V) = \{0\}\}$ est stable par chaque $s_{\alpha,\alpha^\vee}$.
6. Supposons que $V^\perp \neq \{0\}$. En utilisant 3, montrer qu'il existe $\alpha \in \Delta \cap V^\perp$.
7. Montrer que $(.|.)$ est non-dégénérée en utilisant 2.