Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n° 5

Exercice 1 (Dernière tentative)**.** Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(V)$ et supposons que V soit un $\mathfrak{g}$-module simple.

1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ tel que $V_\lambda(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$.
2. En utilisant le lemme de Lie, montrer que $V = V_\lambda(\mathfrak{a})$.
3. En déduire que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple.
4. Montrer que $\mathfrak{sl}_n$ est une algèbre de Lie semi-simple

Exercice 2. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, identifier $U(\mathfrak{g})$.

Exercice 3. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension 2 de base x, y définie par $[x, y] = y$.

1. Donner une base de $U(\mathfrak{g})$
2. Déterminer quelques multiplications non triviales dans cette base.
3. Comprendre la structure de $\mathfrak{g}$-module de U_n/U_{n-1}.

Exercice 4. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de base $x_1, \ldots, x_n$. Soit $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{g}$ la base duale de $x_1, \ldots, x_n$ via la forme de Killing (*i.e.* $L(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$). On définit alors un élément c de $U_2(\mathfrak{g})$ via

$$c := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

c est appelé un élément de Casimir de $\mathfrak{g}$.

1. Expliquer pourquoi l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a été supposée semi-simple dans la définition ci-dessus.
2. Soit $z \in \mathfrak{g}$. On écrit $[z, x_i] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j$ et $[z, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} y_j$. En considérant $L([z, x_i], y_j)$, montrer que $\lambda_{ij} = \mu_{ji}$.

3. Montrer que $ad(z)(c) = 0$.
4. Montrer que c est un élément du centre de l'algèbre (associative ou de Lie) $U(\mathfrak{g})$.

Exercice 5. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Soit $R \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ la partie fermée définie par

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On pose $S := R \cap (-R)$ et $Q := R \setminus S$.

1. On suppose $S \neq \emptyset$. Montrer que $\mathfrak{p}$ n'est pas résoluble.
2. Montrer que $(R + Q) \cap R \subset Q$ (indication : on pourra s'appuyer sur l'égalité $-(\alpha + \beta) + \alpha = -\beta$.)
3. Montrer que $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal de $\mathfrak{p}$.
4. Montrer que $\mathfrak{s} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}$.
5. On considère $\mathfrak{h}_0 := \{x \in \mathfrak{h} \,|\, \forall \alpha \in S, \alpha(h) = 0\}$ et $\mathfrak{h}' := Vect(h_\alpha | \alpha \in S)$. Montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}'$, que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ et $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \cap \mathfrak{h}$.
6. Montrer que $\mathfrak{s}' := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$
7. Montrer que $\mathfrak{s}'$ est une algèbre de Lie semi-simple.