Université de Lyon **Algèbres de Lie et Généralisations**
M2 Recherche Math **Année 2013/2014**

TD n° 6

Exercice 1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple muni d'une SAC $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. On rappelle que $V := \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}$ module pour l'action adjointe

$$\mathrm{ad}(g_1)(g_2 \otimes g_3) = [g_1, g_2] \otimes g_3 + g_2 \otimes [g_1, g_3].$$

On admet (cf. Exercice 3) qu'il existe un élément non nul $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})(c) = \{0\}$.

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $V = \bigoplus_{i=1}^{n} L(\lambda_i)$ et $\mathfrak{g} = L(\beta)$ pour certains poids entiers dominants $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \beta$.
2. Montrer que 0, vu comme élément de $\mathfrak{h}^*$, apparait dans la liste $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.
3. Déterminer le poids d'un vecteur $v \in \mathfrak{g}_{\alpha_1} \otimes \mathfrak{g}_{\alpha_2}$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cup \{0\})$.
4. En déduire que $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ admet un plus haut poids, et le déterminer.
5. Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, déterminer l'ensemble $\{\lambda_i | i \in [\![1, n]\!]\}$.

Exercice 2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}$. Soit $R \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ la partie fermée définie par

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On pose $S := R \cap (-R)$ et $Q := R \setminus S$.

1. On suppose $S \neq \emptyset$. Montrer que $\mathfrak{p}$ n'est pas résoluble.
2. Montrer que $(R + Q) \cap R \subset Q$ (indication : on pourra s'appuyer sur l'égalité $-(\alpha + \beta) + \alpha = -\beta$.)
3. Montrer que $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$ est un idéal de $\mathfrak{p}$.
4. Montrer que $\mathfrak{s} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}$.

5. On considère $\mathfrak{h}_0 := \{x \in \mathfrak{h} \,|\, \forall \alpha \in S, \alpha(h) = 0\}$ et $\mathfrak{h}' := Vect(h_\alpha | \alpha \in S)$. Montrer que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}'$, que $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ et $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \cap \mathfrak{h}$.
6. Montrer que $\mathfrak{s}' := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] = \mathfrak{h}' \oplus \bigoplus_{\alpha \in S} \mathfrak{g}_\alpha$
7. Montrer que $\mathfrak{s}'$ est une algèbre de Lie semi-simple.

Exercice 3. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de base $x_1, \ldots, x_n$. Soit $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{g}$ la base duale de $x_1, \ldots, x_n$ via la forme de Killing (*i.e.* $L(x_i, y_j) = \delta_{i,j}$). On définit alors un élément c de $U_2(\mathfrak{g})$ via

$$c := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

c est appelé un élément de Casimir de $\mathfrak{g}$.

1. Expliquer pourquoi l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a été supposée semi-simple dans la définition ci-dessus.
2. Soit $z \in \mathfrak{g}$. On écrit $[z, x_i] = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j$ et $[z, y_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} y_j$. En considérant $L([z, x_i], y_j)$, montrer que $\lambda_{ij} = \mu_{ji}$.
3. Montrer que $ad(z)(c) = 0$.
4. Montrer que c est un élément du centre de l'algèbre (associative ou de Lie) $U(\mathfrak{g})$.