

Introduction aux variétés commutantes
des algèbres de Lie réductives définies sur
un corps algébriquement clos de
caractéristique zéro

MICHAËL P. BULOIS

9 août 2006

sous la direction de PHILIPPE CALDERO et THIERRY
LEVASSEUR

Table des matières

1	Rappels de la théorie générale	3
1.1	Rappels sur les algèbres de Lie réductives	3
1.2	Rappels sur les \mathcal{S} -triplets	4
1.3	Les sous-algèbres paraboliques	6
1.4	Nilradical	8
2	Théorie de Richardson	9
2.1	Polarisation	9
2.2	Le cas nilpotent	10
3	Éléments distingués et théorie de Bala-Carter	12
3.1	Éléments distingués	12
3.2	Sous-algèbres paraboliques distinguées	14
4	Irréductibilité de la variété commutante, un théorème de Richardson	15
4.1	Élagage du problème	16
4.2	Étude des éléments polarisables	17
5	Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente, un théorème de Premet	18
5.1	Élagage du problème	18
5.2	Éléments presque distingués	19
5.3	Orbites nilpotentes induites	20
5.4	Une variété conique	21
5.5	Le résultat tant attendu	23
A	Annexe : Cas A_n	24
B	Annexe : Définitions et théorie générale	27

Introduction

De tout temps, depuis le début du vingtième siècle, les algèbres de Lie ont joué un rôle central en mathématiques et en physique. C'est donc tout naturellement qu'est venu le besoin d'étudier l'irréductibilité de leur variété commutante. Fixons plus précisément le cadre de notre étude. On désignera par \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps \mathbb{k} algébriquement clos de caractéristique zéro. Toutes les notions de topologie utilisées concerneront la topologie de Zariski sur \mathbb{k} . Exception faite de la section (1.1), \mathfrak{g} sera au moins supposée réductible, voire semi-simple. On pourra alors notamment considérer l'action du groupe adjoint G sur \mathfrak{g} . On utilisera aussi fréquemment le théorème de Jacobson-Morosov sur l'existence de \mathcal{S} -triplets, et l'action adjointe d'une sous-algèbre de Cartan au travers d'un système de racines. Ceci qui nous fournira dans un premier temps une bonne description des sous-algèbres paraboliques de \mathfrak{g} . Dans une seconde partie, nous aborderons la théorie de Richardson [Ri1] (~ 1967) traitant de l'existence d'une G -orbite intersectant, de façon dense, le radical nilpotent d'une sous-algèbre parabolique donnée. Dans une troisième partie, nous étudierons plusieurs résultats issus de la théorie de Bala-Carter [Ca] (~ 1985), autour de la notion d'élément distingué. Nous aurons alors toutes les cartes en main pour nous lancer dans la démonstration d'un autre théorème de Richardson [Ri2] (1979), concernant l'irréductibilité de la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$. Enfin, nous étudierons la variété commutante nilpotente $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}) := \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, dont les composantes irréductibles sont décrites par un théorème de Premet [Pr] (2003). L'annexe A permet de visualiser un peu mieux les notions introduites dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{k})$. Tandis que l'annexe B récapitule les résultats majeurs de la théorie des groupes algébriques et des algèbres de Lie. La majeure partie des résultats que l'on admettra sont issus de [TY], qui est réellement un livre de référence complet dans le domaine.

1 Rappels de la théorie générale

1.1 Rappels sur les algèbres de Lie réductives

Suite à quelques contradictions trouvées dans [TY] concernant la définition d'éléments semi-simples et nilpotents et la définition d'algèbre de Lie réductive, nous allons redéfinir ces notions. Ici, G sera un groupe algébrique affine connexe et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Choisissons une représentation fidèle du groupe G dans un espace vectoriel de dimension finie V (elle existe par [TY], 22.1.5). Alors \mathfrak{g} est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$. On définit alors la décomposition de Jordan des éléments de \mathfrak{g} en partie semi-simple et nilpotente, par la décomposition naturelle sur $\mathfrak{gl}(V)$. Il est à noter ([TY], 23.6), que les parties semi-simples et nilpotentes des éléments de \mathfrak{g} sont des éléments de \mathfrak{g} et que cette décomposition ne dépend pas de la représentation du groupe G .

Remarque 1.1.1. *Attention, ces définitions dépendent du groupe G . Prenons l'exemple de $G_a := (\mathbb{k}, +)$ et $G_m := (\mathbb{k}^*, \times)$. Considérons ces deux représentations :*

$$G_a \cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G_m \cong \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors leurs deux algèbres de Lie sont isomorphe à \mathbb{k} , mais la première est composée d'éléments nilpotents et la seconde d'éléments semi-simples.

Heureusement dans le cas des algèbres de Lie semi-simples (*i.e.* dont le radical (le plus grand idéal résoluble, noté $\text{rad } \mathfrak{g}$), est nul), la décomposition de Jordan, ne dépend pas de la représentation de \mathfrak{g} ([TY], 20.4.4). Par contre, comme le montre la remarque ci-dessus, le problème se pose pour les algèbres de Lie réductives au sens de [TY] (*i.e.* dont le radical nilpotent, $\text{nil } \mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \text{rad } \mathfrak{g}$, est nul. Ceci équivaut à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est semi-simple et implique en particulier que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ ([TY], 20.5)).

Pour remédier à cela, si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réductive au sens de [TY], à priori sans groupe algébrique associé, on peut décréter que \mathfrak{g} est réductive (*i.e.* $\text{nil } \mathfrak{g} = \{0\}$, et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est composée d'éléments semi-simples), en posant $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$ avec $G = G_{ad} \times G_m^{\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})}$ où G_{ad} est le groupe adjoint de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; il est semi-simple.

Rappelons que le groupe adjoint d'une algèbre de Lie semi-simple est le groupe fermé engendré par les automorphismes élémentaires de \mathfrak{g} (*i.e.* les automorphismes de la forme $\exp(\text{ad } n)$ où $n \in \mathfrak{g}$ est nilpotent), c'est donc un sous groupe de $\text{GL}(\mathfrak{g})$ et agit ainsi naturellement sur \mathfrak{g} . Ce choix de groupe associé revient à décréter que la décomposition de Jordan d'un élément $x = x_1 + x_2 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est donnée par $x_s = (x_1)_s + x_2$ et $x_n = (x_1)_n$ et cela correspond à la décomposition de Jordan usuelle pour toute représentation **semi-simple** de dimension finie de \mathfrak{g} ([TY], 20.5.8). Pour manipuler les représentations d'algèbres de Lie réductives, on dispose du théorème suivant ([TY], 20.5.10) :

Théorème 1.1.2. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive, (V, σ) une représentation de dimension finie de \mathfrak{g} , $\mathfrak{g}' = \sigma(\mathfrak{g})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- σ est semi-simple.
- \mathfrak{g}' est réductive et les éléments de son centre sont semi-simples.
- Les éléments de $\sigma(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}))$ sont semi-simples.
- La restriction de σ à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est semi-simple.

Introduisons maintenant une nouvelle notion. On dit qu'une sous-algèbre \mathfrak{l} est réductive dans \mathfrak{g} si $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{l}$ est une représentation semi-simple. Il est facile de voir que \mathfrak{l} est réductive au sens de [TY]. Dans ce cas, si \mathfrak{g} est réductive et si x est un élément de \mathfrak{l} , par le théorème précédent, la décomposition de Jordan de x ne dépend pas du fait qu'on le considère comme élément de \mathfrak{l} (en tant qu'algèbre de Lie réductive), ou comme élément de \mathfrak{g} . On peut donc dire sans ambiguïtés que \mathfrak{l} est réductive.

Étant donné une sous-algèbre de Lie \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , on note $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] = \{0\}\}$ son centralisateur dans \mathfrak{g} . On dispose alors de la proposition suivante.

Proposition 1.1.3 ([TY], 20.5.13). *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et soit \mathfrak{l} une algèbre de Lie réductive dans \mathfrak{g} . Alors $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l})$ est également réductive dans \mathfrak{g} .*

1.2 Rappels sur les \mathcal{S} -triplets

Les preuves de la majorité des résultats cités ici étant relativement techniques, j'ai choisi de ne pas les reproduire. On pourra néanmoins toutes les trouver dans le chapitre 32 de [TY]. On se place dans le cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple et G est son groupe adjoint. On note l le rang de \mathfrak{g} , (*i.e.* La

dimension de tout sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On dit que $(e, h, f) \neq (0, 0, 0)$ est un \mathcal{S} -triplet si les équations suivantes sont vérifiées :

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

On dit que e est l'élément positif (du \mathcal{S} -triplet), f l'élément négatif, et h l'élément simple. Un \mathcal{S} -triplet peut être vu comme une représentation fidèle de \mathfrak{sl}_2 dans \mathfrak{g} (via $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$). On en déduit en particulier que e et f sont nilpotents et que h est semi-simple. Un théorème majeur concernant les \mathcal{S} -triplets est le suivant :

Théorème 1.2.1 (Jacobson-Morozov). *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et e un élément nilpotent non nul de \mathfrak{g} . Alors il existe $h, f \in \mathfrak{g}$ tels que (e, h, f) soit un \mathcal{S} -triplet de \mathfrak{g} .*

Une preuve en est donné dans ([TY], 32.1.5). Cette preuve s'appuie notamment sur le lemme suivant ([TY], 32.1.3) qui nous sera utile pour la démonstration du lemme 3.1.5.

Lemme 1.2.2. *Soient $h, e \in \mathfrak{g}$ tels que $[h, e] = 2e$ et $h \in [e, \mathfrak{g}]$. Alors il existe $f \in \mathfrak{g}$ tel que (e, h, f) soit un \mathcal{S} -triplet.*

Le théorème précédent passe bien aux algèbres de Lie réductives. En effet, les éléments nilpotents d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ sont des éléments de \mathfrak{g} (où $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ est la partie semi-simple de \mathfrak{g}').

Citons maintenant le théorème de conjugaison des \mathcal{S} -triplets ([TY], 32.3.1).

Théorème 1.2.3. *Soient (e, h, f) et (e', h', f') deux \mathcal{S} -triplets. On note $\mathfrak{s} = \mathbb{k}e + \mathbb{k}h + \mathbb{k}f$ et $\mathfrak{s}' = \mathbb{k}e' + \mathbb{k}h' + \mathbb{k}f'$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Les éléments e et e' sont G -conjugués*
- (ii) *Les éléments h et h' sont G -conjugués*
- (iii) *Les \mathcal{S} -triplets (e, h, f) et (e', h', f') sont G -conjugués*
- (iv) *Les sous-algèbres \mathfrak{s} et \mathfrak{s}' sont G -conjuguées*

On fixe maintenant une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et une base Δ de $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, le système de racines de \mathfrak{g} sous l'action adjointe de \mathfrak{h} . On a alors la proposition suivante ([TY], 32.4.3) :

Proposition 1.2.4. *Si h est un élément simple quelconque de \mathfrak{g} , alors il existe $\theta \in G$ tel que $\theta(h) \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(\theta(h)) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\alpha \in \Delta$.*

Conjugué au théorème 1.2.3, ceci nous donne en particulier la finitude du nombre d'orbites nilpotentes. On peut affiner un peu ce résultat grâce au lemme suivant ([TY], 32.4.5) :

Lemme 1.2.5. *Soit h un élément simple de \mathfrak{g} . Alors il existe un unique $h_1 \in G.h$ tel que $h_1 \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(h_1) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$.*

Ce dernier lemme nous permet de définir une application $C : \mathcal{N} \rightarrow \{0, 1, 2\}^l$ telle que si e est un élément nilpotent et h un élément simple associé, alors, avec les notations du lemme, $C(e) = (\alpha(h_1))_{\alpha \in \Delta}$. Cette application est constante sur les G -orbites et est de plus relativement canonique (à l'ordre des éléments près), compte tenu du fait que deux sous-algèbres de Cartan sont G -conjuguées ainsi que deux bases du système de racines. On appelle $C(e)$ la caractéristique de e , et on dit que e est pair si $C(e)_i$ appartient à $\{0, 2\}$ pour tout i .

1.3 Les sous-algèbres paraboliques

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . On considère le système de racines $\Phi = \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, issu de l'action adjointe de \mathfrak{h} sur \mathfrak{g} . On a alors (cf [TY], 20.6)

$$- \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})} \mathfrak{g}_\alpha \text{ avec } \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1.$$

- Si $\alpha, \beta \in \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, alors $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
- $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{k}h_\alpha$ avec $h_\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha(h_\alpha) = 2$.

On considère également Δ une base de Φ , Φ^+ l'ensemble des racines positives associées à Δ , et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, la sous-algèbre de Borel associée.

Passons maintenant à une description poussée des sous-algèbres de Lie d'une algèbre de Lie semi-simple. Pour un sous-ensemble $P \subset \Phi$, on pose

$$\mathfrak{g}_P = \bigoplus_{\alpha \in P} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{h}_P = \sum_{\alpha \in P} \mathbb{k}h_\alpha.$$

Proposition 1.3.1 ([TY], 20.7). *Soit \mathfrak{a} une sous-algèbre ad \mathfrak{h} -stable.*

- (i) *Il existe un sous-ensemble fermé $P \subset \Phi$ (i.e. $(P + P) \cap \Phi \subset P$) et un sous-espace \mathfrak{h}' de \mathfrak{h} tels que $\mathfrak{h}_{P \cap (-P)} \subseteq \mathfrak{h}'$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{g}_P$.*
- (ii) *Le radical de \mathfrak{a} est $\mathfrak{t} + \mathfrak{g}_Q$ où $Q = P \setminus (-P)$, $\mathfrak{t} = \{x \in \mathfrak{h}' \mid \forall \alpha \in P \cap (-P), \alpha(x) = 0\}$*
- (iii) *\mathfrak{a} est réductive dans \mathfrak{g} si et seulement si $P = -P$*

On dit qu'une sous-algèbre \mathfrak{p} est parabolique si elle contient une sous-algèbre résoluble maximale de \mathfrak{g} (i.e. une sous algèbre de Borel).

Proposition 1.3.2 ([TY], 20.8.6). *Si \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique contenant \mathfrak{h} , c'est à dire $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_P$, on a les propriétés suivantes :*

- (i) *Le radical nilpotent de \mathfrak{p} est $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_Q$, où $Q = P \setminus (-P)$. C'est aussi le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{p} .*
- (ii) *\mathfrak{g}_Q est l'orthogonal de \mathfrak{p} , par rapport à la forme de Killing.*
- (iii) *$\mathfrak{l} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_{P \cap (-P)}$ est réductive dans \mathfrak{g} et $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{g}_Q$. On dit d'une sous-algèbre possédant ces propriétés qu'elle est un facteur de Levi de \mathfrak{p} .*
- (iv) *Soit \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{l} , alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})$.*
- (v) *Par conjugaison par un automorphisme élémentaire de \mathfrak{g} , on peut supposer que $\Phi^+ \subseteq P$, c'est à dire que \mathfrak{p} contient \mathfrak{b} .*
- (iv) *Dans ce cas, on peut partitionner $\Phi^+ = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ de sorte que*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cup (-\Phi_1)} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1 \cup (-\Phi_1)} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_2} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Pour la suite de la sous-section, $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_P$ désignera une sous-algèbre parabolique contenant \mathfrak{b} et on note \mathfrak{l} son facteur de Levi défini en (iii). On pose $\Delta_{\mathfrak{p}} = \{\alpha \in \Delta \mid -\alpha \in P\}$. D'autre part, étant donné, $I \subseteq \Delta$, on note \mathfrak{p}_I , la sous-algèbre parabolique engendrée par \mathfrak{h} , \mathfrak{b} et les espaces radiciels \mathfrak{g}_α pour $\alpha \in -I$. On a le théorème fondamental de description des paraboliques suivant, qui peut se déduire de la proposition 1.3.2 :

Théorème 1.3.3. *Soit \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique contenant \mathfrak{b} , alors $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\Delta_{\mathfrak{p}}}$. On en déduit que $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = \{x \in \mathfrak{h} \mid \alpha(x) = 0, \forall \alpha \in \Delta_{\mathfrak{p}}\}$ et \mathfrak{l} est le centralisateur dans \mathfrak{g} du tore $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$.*

Nous allons maintenant construire une graduation associée à \mathfrak{p} . Soit $I \subseteq \Delta$, on définit la fonction $\eta_I : \Phi \rightarrow 2\mathbb{Z}$ par :

$$\eta_I(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in I \\ 2 & \text{si } \alpha \in \Delta \setminus I. \end{cases}$$

et comme Δ forme une base de Φ , on peut étendre η_I à Φ de sorte qu'il forme un morphisme additif : $\eta_I(\sum_{\alpha \in \Delta} n_{\alpha} \alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\alpha} \eta_I(\alpha)$. On décompose alors \mathfrak{g} en posant

$$\mathfrak{g}(i, I) = \sum_{\eta_I(\alpha)=i} \mathfrak{g}_{\alpha}. \text{ On a alors}$$

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in 2\mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i, I) \quad \text{et} \quad \mathfrak{p} = \bigoplus_{i \in 2\mathbb{N}} \mathfrak{g}(i, \Delta_{\mathfrak{p}}).$$

De façon parallèle, si $h \in \mathfrak{h}$ est un élément simple (c'est à dire l'élément semi-simple d'un \mathcal{S} -triplet), par la classification des représentations de \mathfrak{sl}_2 , on peut dire que $\alpha(h)$ est entier. La construction que nous allons faire marche en fait pour tout $h \in \mathfrak{h}$, tel que $\alpha(h)$ soit entier pour tout $\alpha \in \Phi$. On pose pour un tel $h : \mathfrak{g}(i, h) = \sum_{\alpha(h)=i} \mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = ix\}$. On définit alors

$$\mathfrak{p}_h = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i, h), \quad \mathfrak{l}_h = \mathfrak{g}(0, h), \quad \mathfrak{m}_h = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}(i, h).$$

Propriété 1.3.4. \mathfrak{p}_h est une sous-algèbre parabolique de radical nilpotent \mathfrak{m}_h , et \mathfrak{l}_h en est un facteur de Levi.

Démonstration. L'élément $h \in \mathfrak{h}$ appartient à l'adhérence d'une chambre de Weyl de Φ . En particulier, il existe Γ une base de Φ telle que $\alpha(h) \in \mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Gamma$. On en déduit que \mathfrak{p}_h contient la sous-algèbre de Borel associée à Γ , et que \mathfrak{p}_h est parabolique.

Avec les notations de 1.3.2, on a $P = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(h) \geq 0\}$ et $Q = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(h) \geq 1\}$, donc d'après 1.3.2, \mathfrak{m}_h est bien le radical nilpotent de \mathfrak{p}_h et \mathfrak{l}_h en est bien un facteur de Levi. \square

Construisons maintenant un élément semi-simple $h_I \in \mathfrak{h}$ à partir de $I \subseteq \Delta$ de sorte que $\mathfrak{g}(i, h_I) = \mathfrak{g}(i, I)$. Il suffit de choisir h_I tel que $\alpha(h_I) = \eta_I(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Delta$, ce qui est possible car Δ est une base de \mathfrak{h}^* . Notons que $\mathfrak{l}_I := \mathfrak{g}(0, h_I) = \mathfrak{g}(0, \Delta_{\mathfrak{p}})$. Lorsque $I = \Delta_{\mathfrak{p}}$, on notera h_I sous la forme $h_{\mathfrak{p}}$.

Réénonçons maintenant, dans un cadre réductif, toute la théorie développée dans cette sous-section. On supposera ainsi que $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ est une algèbre réductrice (où $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ est semi-simple, de sorte que l'on réutilisera les notations ci-dessus). Les sous-algèbres paraboliques sont les $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$, où \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} . Les paraboliques sont toujours bien indexés par les parties de Δ . Le radical nilpotent \mathfrak{m}' d'un tel \mathfrak{p}' est le radical nilpotent \mathfrak{m} de \mathfrak{p} ; tandis que le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{p}' est $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$. Les facteurs de Levi de \mathfrak{p}' sont de la forme $\mathfrak{l}' = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ où \mathfrak{l} est un facteur

de Levi de \mathfrak{p} . On a toujours $\mathfrak{l}' = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}'))$. Les graduations citées dans le cas semi-simple restent inchangées, exepté pour l'indice 0 : $\mathfrak{g}'(0, -) = \mathfrak{g}(0, -) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ et $\mathfrak{g}'(i, -) = \mathfrak{g}(i, -)$ pour $i \neq 0$.

De cette façon, on peut parler des sous-algèbres paraboliques de \mathfrak{l}_I comme étant les $\mathfrak{p}_{I,J} = [\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I]_J \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_I)$, où $J \subset I \subset \Delta$. De façon similaire au cas semi-simple, on peut alors construire un élément $h_{I,J} \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I] = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{k}h_{\alpha}$ tel que

$$\alpha(h_{I,J}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in J \\ 2 & \text{si } \alpha \in I \setminus J. \end{cases}$$

On a alors la relation suivante : $\mathfrak{l}_J = \mathfrak{l}_I(0, h_{I,J}) = \mathfrak{g}(0, h_J)$.

Remarque 1.3.5. (i) *Attention, dans toute cette sous-section, les facteurs de Levi ou les éléments semi-simples associés aux paraboliques dépendent des choix de \mathfrak{h} et de Δ . Néanmoins, le radical nilpotent reste toujours défini de façon intrasèque au parabolique.*

(ii) *Les décompositions en sous-espaces du type $\mathfrak{g}(i, -)$ forment une graduation de l'algèbre de Lie, c'est à dire $[\mathfrak{g}(i, -), \mathfrak{g}(j, -)] = \mathfrak{g}(i+j, -)$.*

1.4 Nilradical

Ici, \mathfrak{g} désigne une algèbre de Lie réductive, et \mathfrak{k} une sous-algèbre de \mathfrak{g} . Soit $\sigma = \text{ad}_{\mathfrak{g}}$ la représentation adjointe sur \mathfrak{g} . On note $\sigma_{\mathfrak{k}}$ la restriction de σ à \mathfrak{k} .

Proposition 1.4.1 ([TY], 19.5.5). *Soit $\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = \mathfrak{g}$ une suite de Jordan Hölder associée à $\sigma_{\mathfrak{k}}$ et σ_i la représentation de \mathfrak{k} induite sur V_i/V_{i-1} par σ pour $1 \leq i \leq n$.*

(i) Il existe un unique idéal \mathfrak{n} de \mathfrak{k} , maximal sur les idéaux \mathfrak{a} de \mathfrak{k} tels que les élément de $\sigma(\mathfrak{a})$ soient nilpotents.

(ii) On a $\mathfrak{n} = \ker \sigma_1 \cap \dots \cap \ker \sigma_n \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Corollaire 1.4.2. *Il existe un unique idéal \mathfrak{n} de \mathfrak{k} , maximal sur les idéaux de \mathfrak{k} constitués d'éléments nilpotents de \mathfrak{g} .*

On appelle \mathfrak{n} le nilradical de \mathfrak{k} (dans \mathfrak{g}) et on le note $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$. Il est possible de voir ([TY], 19.5.6) que $\text{nil} \mathfrak{k} \subset \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$.

Proposition 1.4.3. *Soit \mathfrak{k} , une sous-algèbre de \mathfrak{g} , \mathfrak{l} une algèbre réductive dans \mathfrak{g} et \mathfrak{n} un idéal de \mathfrak{k} constitué d'éléments nilpotents de \mathfrak{g} . Si on suppose de plus que $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$, alors \mathfrak{n} est le nilradical de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} .*

Démonstration. Par maximalité de $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$, on sait que $\mathfrak{n} \subset \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$. Réciproquement, si $n \in (\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}) \setminus \mathfrak{n}$ est un élément de $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$, alors la première inclusion nous indique qu'il existe $n' \neq \{0\}$ dans $(\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}) \cap \mathfrak{l}$. Par Le théorème de Jacobson-Morozov (1.2.1), il existe un \mathcal{S} -triplet non trivial, (n', h, m) , dans \mathfrak{l} . Or $[n', m] = h$, donc $h \in \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$ et h est un élément semi-simple non-nul, ce qui nous fournit une contradiction. En conclusion : $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k} = \mathfrak{n}$. \square

Corollaire 1.4.4. *Le nilradical d'une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} coïncide avec son radical nilpotent.*

Enfin, la propriété suivante permet un peu d'expliquer en quoi le nilradical est un objet intéressant.

Proposition 1.4.5. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et G son groupe adjoint. Si K un sous-groupe de G et $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, alors $R_u(K)$ (le radical unipotent de K), a pour algèbre de Lie $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{k}$.*

2 Théorie de Richardson

Cette section est très largement inspirée de ([TY], ch.33).

Dans toute cette partie (sauf la remarque 2.2.5), \mathfrak{g} désigne une algèbre de Lie semi-simple et G son groupe adjoint. Le but de cette partie est de démontrer le théorème 2.2.4 que l'on doit à Richardson. Il nous faut tout d'abord introduire quelques notions, notamment celle de polarisation.

2.1 Polarisation

Si x est un élément de \mathfrak{g} , on pose $f_x \in \mathfrak{g}^*$ l'application $f_x(y) = K(x, y)$, où K est la forme de Killing de \mathfrak{g} . Comme \mathfrak{g} est semi-simple, l'homomorphisme de Killing $x \mapsto f_x$ est un isomorphisme.

Définition 2.1.1. *Soit \mathfrak{a} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} et $x \in \mathfrak{g}$. On dit que \mathfrak{a} est subordonnée à x si $f_x([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = 0$.*

On dit que \mathfrak{a} est une polarisation de x si c'est en plus un sous-espace vectoriel maximal subordonné à x .

On note $\text{Pol}(x)$ l'ensemble des polarisations de x .

Si $\text{Pol}(x) \neq \emptyset$, on dit que x est polarisable.

Remarquons que si \mathfrak{a} est une polarisation de x , alors $\mathfrak{g}^x := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\} \subseteq \mathfrak{a}$.

Propriété 2.1.2. *Une sous-algèbre de Lie \mathfrak{a} subordonnée à un élément $x \in \mathfrak{g}$ est une polarisation de x si et seulement si $2 \dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^x$.*

Démonstration. Soit $y \in \mathfrak{g}$, on a $K(x, [y, \mathfrak{g}]) = -K([y, x], \mathfrak{g})$, or K est non dégénérée, donc $f_x([y, \mathfrak{g}]) = 0$ si et seulement si $y \in \mathfrak{g}^x$. Cela revient à dire que $f_x([\cdot, \cdot])$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur \mathfrak{g} , pour laquelle l'orthogonale de \mathfrak{g} est \mathfrak{g}^x . Les espaces vectoriels maximaux \mathfrak{a} tels que $f_x([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = 0$ vérifient donc $2 \dim \mathfrak{a} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^x$. \square

On peut démontrer que toute polarisation est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} . Cependant, cela demande quelques raisonnements techniques sans grand intérêt pour la compréhension générale. On peut même se passer de ce résultat pour démontrer le théorème 2.2.4 en considérant $\text{Pol}_p(x)$, l'ensemble des polarisations paraboliques de x . Par abus, nous dirons maintenant qu'un élément x est polarisable si $\text{Pol}_p(x) \neq \emptyset$.

Proposition 2.1.3. *Soit $x \in \mathfrak{g}$ un élément polarisable et $\mathfrak{p} \in \text{Pol}_p(x)$. Alors $\mathfrak{m} = [x, \mathfrak{p}]$ est le radical nilpotent de \mathfrak{p} . Si de plus x est nilpotent, alors $x \in \mathfrak{m}$.*

Démonstration. De part la dimension de \mathfrak{p} , $[x, \mathfrak{p}]$ est l'orthogonal de \mathfrak{p} , par rapport à la forme de Killing. Il s'ensuit d'après 1.3.2, que \mathfrak{m} est le radical nilpotent de \mathfrak{p} .

On écrit ensuite $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cup (-\Phi_1)} \mathfrak{g}_\alpha$, comme en 1.3.2 (ayant choisit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$).

On écrit alors $x = h + \sum_{\alpha \in \Phi^+ \cup (-\Phi_1)} x_\alpha$. On a $K(x, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) = \{0\}$, donc $x_\alpha = 0$ pour $\alpha \in \pm\Phi_1$, et si x est nilpotent alors $h = 0$. On a ainsi montré que x appartient au radical nilpotent de \mathfrak{p} (1.3.2) \square

Regardons maintenant les polarisations d'un élément semi-simple. Par notre discussion en 1.3.2, on a la proposition suivante.

Proposition 2.1.4. (i) *Si h est un élément semi-simple de \mathfrak{g} , alors $\text{Pol}_p(h) \neq \emptyset$.*

(ii) *Si \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} , alors il existe un élément semi-simple $x \in \mathfrak{g}$ (e.g. $x = h_{\mathfrak{p}}$) tel que $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(x)$.*

Démonstration. (i) Soit h un élément semi-simple de \mathfrak{g} , alors h est contenu dans une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . Par la section 1.3, \mathfrak{p}_h est une sous-algèbre parabolique, contenant un Borel. On note Φ^+ l'ensemble des racines positives associées au Borel. On écrit alors $\Phi^+ = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ de sorte que $\mathfrak{p}_h = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cup (-\Phi_1)} \mathfrak{g}_\alpha$. On

a alors

$$2 \dim \mathfrak{p}_h = 2 \dim \mathfrak{l} + 2 \dim \mathfrak{m} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{l} = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^x.$$

De plus, $[\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_h] = \mathfrak{h}_{\Phi_1} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \cup (-\Phi_1)} \mathfrak{g}_\alpha$. Il est alors facile de vérifier que $K(h, [\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_h]) = \{0\}$.

D'où $\mathfrak{p}_h \in \text{Pol}_p(h)$.

(ii) D'après la démonstration de (i), avec les notations de 1.3.2, il suffit de choisir $x = h_{\mathfrak{p}}$. \square

2.2 Le cas nilpotent

Nous allons maintenant énoncer quelques résultats intermédiaires nécessaires à la démonstration du théorème 2.2.4 Notons \mathcal{N} le cône des éléments nilpotents de \mathfrak{g} (encore appelé *cône nilpotent*).

Lemme 2.2.1 ([TY], 33.5.2). *Soit $x \in \mathfrak{g}$.*

(i) *On a $x \in [\mathfrak{g}, x]$ si et seulement si $x \in \mathcal{N}$.*

(ii) *Si $x \notin \mathcal{N}$, alors $\dim G(\mathbb{k}x) = 1 + \dim G(x)$.*

Proposition 2.2.2 ([TY], 33.5.3). *Soit $z \in \mathfrak{g}$. Il existe $x \in \overline{G(\mathbb{k}z)}$ tel que x soit nilpotent et $\dim G(x) = \dim G(z)$.*

Proposition 2.2.3 ([TY], 33.5.4). *Soit $z \in \mathfrak{g}$ un élément polarisable et soit $\mathfrak{p} \in \text{Pol}_p(z)$. Il existe $x \in \overline{G(\mathbb{k}z)}$ nilpotent tel que $\dim G(x) = \dim G(z)$ et $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(x)$.*

Démonstration. On va supposer que z n'est pas nilpotent. Soit $d = \dim \mathfrak{p}$, \mathcal{P} la G -orbite de \mathfrak{p} dans la grassmanienne $\text{Gr}(\mathfrak{g}, d)$ et $p : \text{Gr}(\mathfrak{g}, d) \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$, la projection canonique sur \mathfrak{g} .

Comme \mathfrak{p} est une sous-algèbre de Lie, les éléments de $\overline{\mathcal{P}}$ sont des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} ([TY], 19.7.2). Notons $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{P}} \times \overline{G(\mathbb{k}z)}$ l'ensemble des couples (\mathfrak{q}, y) vérifiant $K(y, [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]) = \{0\}$. Alors, \mathcal{L} est un sous-ensemble fermé de $\overline{\mathcal{P}} \times \overline{G(\mathbb{k}z)}$ contenant (\mathfrak{p}, z) , et $p(\mathcal{L})$ contient $\overline{G(\mathbb{k}z)}$. Or $\text{Gr}(\mathfrak{g}, d)$ est une variété algébrique complète, donc $p(\mathcal{L})$ contient $\overline{G(\mathbb{k}z)}$. Il s'ensuit que pour tout $y \in \overline{G(\mathbb{k}z)}$, il existe $\mathfrak{q} \in \overline{\mathcal{P}}$ tel que $K(y, [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]) = \{0\}$.

Or par la proposition 2.2.2, il existe $x \in \overline{G(\mathbb{k}z)}$ nilpotent tel que $\dim G(x) = \dim G(z)$. Soit $\mathfrak{q} \in \overline{\mathcal{P}}$ de dimension d tel que $K(x, [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]) = \{0\}$. Alors

$$\dim \mathfrak{q} = \dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^z) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^x).$$

Donc $\mathfrak{q} \in \text{Pol}(x)$. Soit maintenant \mathfrak{n} le radical nilpotent de \mathfrak{q} . On a $[x, \mathfrak{q}] = \mathfrak{n}$ (2.1.3) et $\mathfrak{g}^x \subset \mathfrak{q}$, donc :

$$\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{q} - \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{g}^z = \dim \mathfrak{m}.$$

Or d'après ([TY], 28.4.3), $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{p})$ est son propre normalisateur, et en dérivant l'action de G sur \mathcal{P} , on obtient : $\dim \mathcal{P} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p} = \dim \mathfrak{m}$. Le même raisonnement sur l'orbite de \mathfrak{q} nous montre que ces deux orbites ont même dimension avec $\mathfrak{q} \in \overline{\mathcal{P}}$, d'où $G \cdot \mathfrak{p} = G \cdot \mathfrak{q}$. Il existe donc $g \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{p} = g \cdot \mathfrak{q}$. L'élément $g \cdot x$ possède les propriétés requises de la proposition. \square

On choisit maintenant une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} de \mathfrak{g} . Soit P le sous-groupe (connexe) de G , d'algèbre de Lie \mathfrak{p} . P est bien défini d'après ([TY], 29.4.3). On note \mathfrak{m} le radical nilpotent de \mathfrak{p} . La proposition 2.1.4 nous montre que $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(h_{\mathfrak{p}})$. On a alors les propriétés suivantes :

Théorème 2.2.4 (Richardson).

- Il existe une unique G -orbite nilpotente \mathcal{O} telle que $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$ soit un ouvert dense de \mathfrak{m} .
- On a $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{m} \mid \dim \mathfrak{g}^{h_{\mathfrak{p}}}\}$.
- L'ensemble $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$ est une P -orbite.
- Si $x \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$ alors $[x, \mathfrak{p}] = \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(x)$.
- $\mathcal{O} \subset \overline{G \cdot (\mathbb{k}^* h_{\mathfrak{p}})}$.

Démonstration. Par la classification des classes de conjugaison des \mathcal{S} -triplets (1.2.3), il existe r orbites nilpotentes $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$, de sorte que

$$\mathfrak{m} = (\mathcal{O}_1 \cap \mathfrak{m}) \cup \dots \cup (\mathcal{O}_r \cap \mathfrak{m}).$$

On en déduit que,

$$\mathfrak{m} = \overline{(\mathcal{O}_1 \cap \mathfrak{m})} \cup \dots \cup \overline{(\mathcal{O}_r \cap \mathfrak{m})}$$

et comme \mathfrak{m} est irréductible, il existe une G -orbite nilpotente \mathcal{O} telle que $\overline{\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. En tant qu'orbite, $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$ est ouvert dans sa fermeture \mathfrak{m} . D'où l'unicité de l'orbite \mathcal{O} .

Soit $s = \min\{\dim \mathfrak{g}^x \mid x \in \mathfrak{m}\}$ et $\mathcal{M} := \{x \in \mathfrak{m} \mid \dim \mathfrak{g}^x = s\}$. L'orbite \mathcal{O} est de dimension $\dim \mathfrak{g} - s$. L'ensemble \mathcal{M} est un ouvert non-vide de \mathfrak{m} , il intersecte

donc $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$, d'où $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m} \subseteq \mathcal{M}$. Réciproquement, si $y \in \mathcal{M}$, alors $\dim \mathcal{O}_y = \dim \mathcal{O}$ et $y \in \overline{\mathcal{O}}$. D'où $y \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$.

La sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} contient une sous-algèbre de Borel \mathfrak{b} , contenant une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . Le Borel \mathfrak{b} nous donne une base Δ du système de racine $\Phi = \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Choisissons alors $h_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{h}$ comme en 2.1.4 de sorte que $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(h_{\mathfrak{p}})$. On en déduit, grâce à (2.2.3), qu'il existe $x \in \mathcal{N}$ tel que $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{g}^{h_{\mathfrak{p}}}$ et $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(x)$. Et alors, d'après (2.1.3), $x \in \mathfrak{m}$.

Maintenant, intéressons-nous à la P -orbite de x . D'après (2.1.3), $[\mathfrak{p}, x] = \mathfrak{m}$. On en déduit que $P(x)$ est dense dans \mathfrak{m} et que $x \in \mathcal{O}$, l'orbite dense dans \mathfrak{m} . Il s'en suit que $s = \dim \mathfrak{g}^{h_{\mathfrak{p}}}$ et $\dim \mathcal{O} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^x = 2 \dim \mathfrak{m}$.

Soit maintenant $y \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$. Le fait que $\dim \mathfrak{g}^y = \dim \mathfrak{g}^x$ et $K([\mathfrak{p}, \mathfrak{p}], \mathfrak{m}) = \{0\}$ nous donne $\mathfrak{p} \in \text{Pol}(y)$. On a $\mathfrak{g}^y \subset \mathfrak{p}$, d'où $\dim P(y) = \dim P(x)$. Or $P(y) \subset \mathfrak{m}$ (2.1.3), c'est donc une P -orbite dense dans \mathfrak{m} . On en déduit que $P(y) = P(x)$. D'où $P(x) = \mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$.

Enfin, d'après notre choix de x , on voit que $\mathcal{O} \subset \overline{G \cdot (\mathbb{k}^* h_{\mathfrak{p}})}$. \square

On appelle $\mathcal{O} \cap \mathfrak{m}$ l'orbite de Richardson de \mathfrak{p} et ses éléments sont appelés les éléments de Richardson de \mathfrak{p} . Les sous-algèbres paraboliques sont fortement liées à leurs éléments de Richardson, et le fait de savoir qu'un élément nilpotent est de Richardson (*i.e.* est polarisable) pour une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p} , nous permettra de les manipuler plus aisément.

Remarque 2.2.5. *Si on se place dans le cas où $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ est réductif (avec $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$), alors le théorème de Richardson reste inchangé si on considère l'action du groupe adjoint G de \mathfrak{g} . En effet, comme on l'a vu à la fin de la sous-section 1.3, le centre n'intervient pas dans les radicaux nilpotents de paraboliques et les éléments nilpotents de \mathfrak{g}' appartiennent à \mathfrak{g} .*

3 Éléments distingués et théorie de Bala-Carter

3.1 Éléments distingués

Définition 3.1.1. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et $x \in \mathfrak{g}$. On dit que x est distingué si \mathfrak{g}^x est constitué d'éléments nilpotents. Dans le cas où \mathfrak{g} est réductive, on définit les éléments distingués comme étant ceux de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

Soit x un élément distingué. On remarque que x est nécessairement nilpotent. Par le théorème de Jacobson-Morozov (1.2.1), il existe un \mathcal{S} -triplet (x, h, y) , que nous garderons dans toute la suite de la sous-section. On pose $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_h = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(0, h)$; $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_h = \mathfrak{g}(0, h)$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_h$ (cf 1.3).

Propriété 3.1.2. *Si \mathfrak{g} est semi-simple, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) x est distingué.
- (ii) Le plus petit facteur de Levi contenant x est \mathfrak{g} .
- (iii) $\text{ad } x : \mathfrak{g}(0, h) \rightarrow \mathfrak{g}(2, h)$ est bijective.
- (iv) $\dim \mathfrak{g}(0, h) = \dim \mathfrak{g}(2, h)$.

Démonstration.

(i) \Leftrightarrow (ii). On a une correspondance entre les tores et les facteurs de Levi de \mathfrak{g} . Les facteurs de Levi sont exactement les centralisateurs de tores. De plus, si \mathfrak{l} est un facteur de Levi et \mathfrak{c} son centre, alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l})$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{c})$ (cf 1.3.2).

Si t est un élément semi-simple de \mathfrak{g}^x alors $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(t) \subsetneq \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Levi contenant x . Réciproquement si $\mathfrak{l} \subsetneq \mathfrak{g}$ est un Levi contenant x alors $\{0\} \neq \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l}) \subset \mathfrak{g}^x$ où \mathfrak{c} est composé d'éléments semi-simples.

(iii) \Leftrightarrow (iv). Par la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 , l'application $\text{ad } x$ réalise une surjection de $\mathfrak{g}(0, h)$ sur $\mathfrak{g}(2, h)$. D'où l'équivalence.

(i) \Leftrightarrow (iii). Par la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 , on a $\mathfrak{g}^x = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}(i, h) =$

$(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}^x) \oplus \mathfrak{m}^x$. Les éléments de \mathfrak{m}^x sont bien tous nilpotents. Par ailleurs, $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}^x = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(x, h, y)$, c'est une sous-algèbre réductive dans \mathfrak{g} (1.1.3). En particulier, tous ses éléments sont nilpotents si et seulement si elle est nulle, c'est à dire, si et seulement si $\text{ad}|_{\mathfrak{l}} x$ est injective. \square

Dans le cas réductif, on obtient les mêmes résultats en considérant $[\mathfrak{g}(0, h), \mathfrak{g}(0, h)] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}](0, h)$ à la place de $\mathfrak{g}(0, h)$.

Théorème 3.1.3. *Si \mathfrak{g} est réductif, et x est distingué dans \mathfrak{g} , alors x est pair. En particulier $\mathfrak{g}(1, h) = \{0\}$*

Démonstration. Supposons tout d'abord \mathfrak{g} semisimple. Choisissons un élément u de Richardson associé à \mathfrak{p}_h . On écrit $u = \sum_{i \geq 1} u_i$ avec $u_i \in \mathfrak{g}(i, h)$. De

$$\left[\bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i, h), \sum_{i \geq 1} u_i \right] = \bigoplus_{i \geq 1} \mathfrak{g}(i, h)$$

on obtient que $[\mathfrak{g}(0, h), u_1 + u_2] + [\mathfrak{g}(1, h), u_1] = \mathfrak{g}(1, h) \oplus \mathfrak{g}(2, h)$.

Supposons que $\mathfrak{g}(1, h) \neq \{0\}$. Comme $u_1 \in \mathfrak{g}(1, h)$, on a $\dim[\mathfrak{g}(1, h), u_1] < \dim \mathfrak{g}(1, h)$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \dim[\mathfrak{g}(0, h), u_1 + u_2] + \dim[\mathfrak{g}(1, h), u_1] &< \dim \mathfrak{g}(0, h) + \dim \mathfrak{g}(1, h) \\ &= \dim \mathfrak{g}(2, h) + \dim \mathfrak{g}(1, h). \end{aligned}$$

On a obtenu une contradiction. On a donc bien $\mathfrak{g}(1, h) = 0$ et x est pair. Enfin le cas réductif se déduit immédiatement du cas semisimple. \square

Corollaire 3.1.4. *Tout élément distingué est polarisable. Il appartient à l'orbite de Richardson de \mathfrak{p}_h .*

Démonstration. Le cas réductif se déduit directement du cas semi-simple ; supposons donc \mathfrak{g} semi-simple. Si x est pair, alors $\dim \mathfrak{g}^h = \dim \mathfrak{g}^x$. Donc $2 \dim \mathfrak{p}_h = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^x$ et $x \in \mathfrak{m}_h$. Ceci montre que $\mathfrak{p}_h \in \text{Pol}_p(x)$. \square

Enfin, on a le lemme suivant, qui nous servira dans la section 5.3

Lemme 3.1.5 (athématique). *Soient $e, h' \in \mathfrak{g}$ avec e distingué, h' semi-simple et $e \in \mathfrak{g}(2, h')$ tel que e soit un élément de Richardson de $\mathfrak{p}_{h'}$. Alors il existe $f' \in \mathfrak{g}(-2, h')$ tel que (e, h', f') soit un \mathcal{S} -triplet.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{p}_{h'}$ est une polarisation de e , on a $\mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{p}_{h'}$. On en déduit que l'application $\text{ad } e : \mathfrak{g}(-2; h') \rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}](0, h')$ est injective. Or e est distingué dans \mathfrak{g} donc $\dim \mathfrak{g}(-2; h') = \dim \mathfrak{g}(2; h') = \dim \mathfrak{g}(0; h')$. Il s'en suit que notre application est également surjective et par le lemme technique (1.2.2), on en déduit qu'il existe $f' \in \mathfrak{g}(-2; h')$ tel que (e, h', f') soit un \mathcal{S} -triplet. \square

3.2 Sous-algèbres paraboliques distinguées

Passons maintenant à la notion de sous-algèbre parabolique distinguée. Le lien avec les éléments distingués sera fait en 3.2.5. Sauf mention contraire, dans toute cette sous-section, \mathfrak{g} sera une algèbre de Lie semi-simple, \mathfrak{h} sera un tore fixé, Δ une base du système de racines $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, \mathfrak{p} une sous-algèbre parabolique contenant \mathfrak{g}_Δ . On pose $I = \Delta_{\mathfrak{p}}$, c'est à dire, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}(i, I)$.

Lemme 3.2.1 ([TY], 35.2.2). *On a $[\mathfrak{m}_I, \mathfrak{m}_I] = \bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{g}(2i, I)$.*

Définition 3.2.2. *On dit que \mathfrak{p}_I est distinguée si $\dim \mathfrak{g}(0, I) = \dim \mathfrak{g}(2, I)$.*

Remarque 3.2.3. *Par le lemme 3.2.1, on a une définition plus intrinsèque. Un parabolique est distingué si et seulement si $\dim(\mathfrak{p}/\mathfrak{m}) = \dim(\mathfrak{m}/[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}])$.*

La propriété suivante nous permettra de montrer plus facilement qu'une sous-algèbre parabolique est distinguée :

Proposition 3.2.4. *Soit \mathfrak{p}_J une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} . Alors $\dim \mathfrak{g}(0, J) \geq \dim \mathfrak{g}(2, J)$.*

Démonstration. Soit x un élément de Richardson de \mathfrak{p}_J . Alors $\mathfrak{p}_J \in \text{Pol}_{\mathfrak{p}}(x)$ et $[\mathfrak{p}_J, x] = \mathfrak{m}_J$ (2.1.3). L'application $\text{ad } x$ effectue une surjection de \mathfrak{p}_J sur \mathfrak{m}_J , et donc de $\mathfrak{p}_J/\mathfrak{m}_J$ sur $\mathfrak{m}_J/[\mathfrak{m}_J, \mathfrak{m}_J]$. Cela implique que $\dim \mathfrak{g}(0, J) = \dim(\mathfrak{p}/\mathfrak{m}) \geq \dim(\mathfrak{m}/[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) = \dim \mathfrak{g}(2, J)$. \square

La proposition suivante nous révèle le lien entre éléments distingués et paraboliques distingués.

Proposition 3.2.5. (i) *Si (x, h, y) est un \mathcal{S} -triplet avec x distingué, alors \mathfrak{p}_h est une sous-algèbre parabolique distinguée et x en est un élément de Richardson.*

(ii) *Si \mathfrak{p}_I est une sous-algèbre parabolique distinguée et x un élément de Richardson de \mathfrak{p}_I alors x est distingué et $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{p}_I^x = \mathfrak{m}_I^x$.*

Démonstration.

- (i) Le fait que x soit un élément de Richardson de \mathfrak{p}_h à été démontré dans le corollaire 3.1.4. Pour finir de démontrer (i), il suffit de remarquer que $\dim \mathfrak{g}(i, h) = \dim \mathfrak{g}(i, \mathfrak{p}_h)$ (section 1.3).
- (ii) On a $[\mathfrak{p}_I, x] = \mathfrak{m}_I$ et $\mathfrak{p}_I \in \text{Pol}(x)$, donc $\mathfrak{g}^x \subset \mathfrak{p}_I$. Soit $y \in \mathfrak{g}(-2, I)$. Supposons que $[x, y] \in \mathfrak{m}_I$, alors $y \in [\mathfrak{p}_I, x]^\perp = \mathfrak{m}_I^\perp = \mathfrak{p}_I$, ce qui est absurde. Donc $[x, y] \notin \mathfrak{m}_I$. En particulier, cela signifie que $\text{ad } x : \mathfrak{g}(-2, I) \rightarrow \mathfrak{p}_I/\mathfrak{m}_I$ est injectif, et $[\mathfrak{p}_I + \mathfrak{g}(-2, I), x] = \mathfrak{p}_I$. Enfin, de $\mathfrak{p}_I \subset [\mathfrak{g}, x]$, on en déduit en passant à l'orthogonal que $\mathfrak{g}^x \subset \mathfrak{m}_I$. D'où x est distingué et $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{m}_I^x$. \square

Le résultat suivant nous permettra d'utiliser de façon plus commode les éléments de Richardson associés à une sous-algèbre parabolique distinguée donnée :

Proposition 3.2.6. *Soit I une partie de Δ tel que \mathfrak{p}_I , le parabolique associé, soit distingué. On note P_I le groupe parabolique associé à \mathfrak{p}_I et U_I son radical unipotent. On choisit $x = \sum_{i \geq 2} \lambda_i g_i$ un élément de Richardson de \mathfrak{p}_I (où $g_i \in \mathfrak{g}(i, I)$). Alors $U_I(x) = C := \{\lambda_2 g_2 + \sum_{i > 2} \mu_i g'_i \mid g'_i \in \mathfrak{g}(i, I)\}$. En particulier, $\lambda_2 g_2 \in U_I(x)$.*

Démonstration. On sait que $U_I = \exp(\mathfrak{m}_I)$ envoie x dans C . Mais U_I est un groupe unipotent donc l'orbite $U_I(x)$ est fermée ([Di] 11.2.4). Il suffit donc de montrer que $\dim U_I(x) = \dim C$.

Il est facile de voir que $\dim C = \dim \mathfrak{m}_I - \dim \mathfrak{g}(2, I)$.

Par ailleurs, $\mathfrak{g}^x \subset \mathfrak{m}_I^x$ (3.2.5) d'où $\dim U_I(x) = \dim \mathfrak{m}_I - \dim \mathfrak{g}^x$. Mais x est un élément de Richardson de \mathfrak{p}_I donc $\dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{g}(0, I)$. Ce que l'on voulait. \square

Bien sûr, toute cette théorie passe aux algèbres de Lie réductives $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$. Un parabolique $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g}')$ étant dit distingué dans \mathfrak{g}' si \mathfrak{p} l'est dans \mathfrak{g} .

Enfin, le résultat suivant justifie à lui seul une bonne partie de l'importance accordée aux éléments de Richardson et aux sous-algèbres paraboliques distinguées.

Théorème 3.2.7 (Bala-Carter).

$$\mathcal{N} = \bigcup_{(I, J) \in P(\Delta)} \mathcal{O}_{I, J}$$

où $P(\Delta)$ désigne l'ensemble des couples (I, J) , $J \subset I \subset \Delta$, tels que $\mathfrak{p}_{I, J}$ soit distingué dans \mathfrak{l}_I , et $\mathcal{O}_{I, J}$ désigne la G -orbite des éléments de Richardson de $\mathfrak{p}_{I, J}$ dans \mathfrak{l}_I .

Démonstration. Soit x un élément nilpotent de \mathfrak{g} et soit \mathfrak{l}_I un plus petit facteur de Levi contenant x . Alors par la propriété 3.1.2, x est distingué dans \mathfrak{l}_I et il existe un \mathcal{S} -triplet $(x, \tilde{h}, \tilde{y})$ de \mathfrak{l}_I . A conjugaison par un élément du groupe adjoint de $[\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I]$, on peut supposer que $\tilde{h} \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I]$ et $\alpha(\tilde{h}) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ (1.2.5). La sous-algèbre parabolique associée $\mathfrak{p}_{\tilde{h}}$ est alors standard et égale à un $\mathfrak{p}_{I, J}$. Elle est distinguée dans \mathfrak{l}_I et x appartient bien à l'orbite de Richardson dans \mathfrak{l}_I de $\mathfrak{p}_{I, J}$ (Proposition 3.2.5). \square

4 Irréductibilité de la variété commutante, un théorème de Richardson

On s'intéresse ici, à la variété algébrique

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}.$$

Le but de cette section est de démontrer cet autre théorème de Richardson ([Ri2], section 2) :

Théorème 4.0.8. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive, alors $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ est une variété irréductible.*

4.1 Élagage du problème

L'idée de la démonstration du théorème de Richardson est la suivante. On considère la variété

$$\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \overline{\{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \mid \mathfrak{h} \text{ sous-algèbre de Cartan de } \mathfrak{g}\}}.$$

On a bien évidemment $\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. De plus, si \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan, on peut voir $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ comme $\overline{G \cdot (\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})}$, ce qui fait de $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ un bon candidat pour étudier l'irréductibilité de \mathfrak{g} . Tout l'objet de la démonstration est de montrer par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$ que $\mathcal{E}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, le résultat étant clair pour $\dim(\mathfrak{g}) = 0$.

Pour cela on procède en plusieurs étapes pour restreindre petit à petit le problème. C'est l'objet des lemmes suivants, où l'on supposera que pour toute algèbre réductive \mathfrak{g}' de dimension strictement inférieure à \mathfrak{g} , on a $\mathcal{E}(\mathfrak{g}') = \mathfrak{C}(\mathfrak{g}')$.

On commence par se restreindre au cas où \mathfrak{g} semi-simple. Pour cela on écrit $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Lemme 4.1.1. *Supposons que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$ alors $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Toute sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est de la forme $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}$ où \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Soit $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ que l'on écrit $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$, avec $x_1, y_1 \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ et $x_2, y_2 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Alors $(x, y) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ si et seulement si $(x_2, y_2) \in \mathcal{E}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$. Or, il est trivial que $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ si et seulement si $(x_2, y_2) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. Comme $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] < \dim \mathfrak{g}$, grâce à l'hypothèse de récurrence, on a $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. \square

Pour le reste de la preuve, nous supposons donc désormais \mathfrak{g} semi-simple.

Lemme 4.1.2. *Soient $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ tels que x ou y ne soit pas nilpotent. Alors $(x, y) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$*

Démonstration. On écrit $x = x_s + x_n$ la décomposition de Jordan de x avec x_s semi-simple et x_n nilpotent. Comme le problème est symétrique, on supposera par exemple que x est non nilpotent, c'est à dire que $x_s \neq 0$. On considère l'algèbre $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^{x_s}$. Alors, \mathfrak{k} est réductive dans \mathfrak{g} (proposition 1.1.3), $\dim \mathfrak{k} < \dim \mathfrak{g}$ et $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{k})$. Par hypothèse de récurrence, $(x, y) \in \mathcal{E}(\mathfrak{k})$. Or toute sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}' de \mathfrak{k} vérifie $\mathfrak{h}' = \mathfrak{n}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{h}') \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}')$ et contient x_s et une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , donc est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . D'où $\mathcal{E}(\mathfrak{k}) \subseteq \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ et $(x, y) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$. \square

Lemme 4.1.3. *Soit $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ et supposons qu'il existe un élément non nilpotent $z \in \mathfrak{g}^x$. Alors $(x, y) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Pour $t \in \mathbb{k}$, on pose $a_t = ty + (1-t)z$. Alors, $(x, a_t) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ pour tout $t \in \mathbb{k}$. On définit D comme l'ensemble des $t \in \mathbb{k}$ tel que a_t ne soit pas nilpotent. Alors D est un ouvert de \mathbb{k} qui est non vide ($0 \in D$), donc dense dans \mathbb{k} . Par le lemme 4.1.2, on a $(x, a_t) \in \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ pour tout $t \in D$. Or $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ est fermé dans $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$, donc

$$(x, y) = (x, a_1) \in \overline{\{(x, a_t), t \in D\}} \subset \mathcal{E}(\mathfrak{g}).$$

\square

Grâce à ces trois lemmes successifs, on s'est donc ramené à étudier le cas où x est distingué. Ce cas nécessite une démonstration plus technique et sera démontré en 4.2.3.

4.2 Étude des éléments polarisables

Dans cette sous-section on fixe un élément x distingué dans \mathfrak{g} . D'après le Corollaire 3.1.4, x est un élément de Richardson associé à une sous-algèbre parabolique \mathfrak{p}_h où h est semi-simple. On pose $s = \dim \mathfrak{g}^x = \dim \mathfrak{g}^h$ (se rappeler que x est pair). On aura besoin du résultat qui suit pour démontrer la Proposition 4.2.3.

On note $\text{pr}_1 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la projection sur la première composante.

Proposition 4.2.1. *Sous ces hypothèses et notations on a $(x, \mathfrak{g}^x) \subset \overline{G.(\mathbb{k}h, \mathfrak{g}^h)}$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{R} = \overline{G.(\mathbb{k}h, \mathfrak{g}^h)}$ et soit $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \overline{G.(\mathbb{k}h)}$ la restriction de pr_1 à \mathcal{R} . Observons tout d'abord que $\psi(\mathcal{R}) = \overline{G.(\mathbb{k}h)}$ par le Lemme 4.2.2 ci-dessous. Comme x est un élément de Richardson de \mathfrak{p}_h , le théorème (2.2.4) nous donne $x \in \overline{G.(\mathbb{k}h)} = \psi(\mathcal{R})$. Il est facile de voir que $[y, y'] = 0$ pour $(y, y') \in \mathcal{R}$, on a donc $\psi^{-1}(y) \subset (y, \mathfrak{g}^y)$ pour tout $y \in \psi(\mathcal{R})$. En particulier, $\dim \psi^{-1}(x) \leq \dim(x, \mathfrak{g}^x) = \dim \mathfrak{g}^x = s$. Démontrons maintenant que $\dim \psi^{-1}(x) \geq s$, cela entraînera $(x, \mathfrak{g}^x) = \psi^{-1}(x) \subset \mathcal{R}$.

Soit $y \in G.(\mathbb{k}^*h)$ et écrivons $y = g.z$ avec $z \in \mathbb{k}^*h$. Il vient $\mathfrak{g}^y = g.\mathfrak{g}^z = g.\mathfrak{g}^h$ et donc $(y, \mathfrak{g}^y) = g.(z, \mathfrak{g}^h) \subset \mathcal{R}$; par conséquent $\psi^{-1}(y) = (y, \mathfrak{g}^y)$ et $\dim \psi^{-1}(y) = \dim \mathfrak{g}^y = \dim \mathfrak{g}^h = s$. On sait qu'il existe un ouvert $U \subset \psi(\mathcal{R})$ tel que

$$\forall u \in U, \quad \dim \psi^{-1}(u) = \dim \mathcal{R} - \dim \psi(\mathcal{R}),$$

voir ([TY], 15.5.4 (ii)). Puisque $G.(\mathbb{k}^*h)$ est dense dans $\psi(\mathcal{R}) = \overline{G.(\mathbb{k}h)}$ on peut trouver $y \in U \cap G.(\mathbb{k}^*h)$ et on en déduit que $s = \dim \mathcal{R} - \dim \psi(\mathcal{R})$. De ([TY], 15.5.4 (i)) il résulte alors que $\dim \psi^{-1}(x) \geq s$, comme voulu. \square

Démontrons maintenant le lemme utilisé dans la preuve de la proposition précédente.

Lemme 4.2.2. *Soit $z \in \mathfrak{g}$ et $\mathcal{S} = \overline{G.(\mathbb{k}z, \mathfrak{g}^z)}$. Alors, $\text{pr}_1(\mathcal{S}) = \overline{G.(\mathbb{k}z)}$.*

Démonstration. L'ensemble $\text{pr}_1^{-1}(\overline{G.(\mathbb{k}z)})$ est un fermé de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui contient $G.(\mathbb{k}z, \mathfrak{g}^z)$, et par conséquent \mathcal{S} . Donc $\text{pr}_1(\mathcal{S}) \subset \overline{G.(\mathbb{k}z)}$.

Réciproquement, soit $x \in \overline{G.(\mathbb{k}z)}$. Rappelons que (par définition) si $f \in \mathbb{k}[\mathfrak{g}]$ est tel que $f(x) \neq 0$, il existe $(\lambda, g) \in (\mathbb{k}, G)$ vérifiant $f(g.\lambda z) \neq 0$. Considérons l'application $\iota : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ qui à y associe (y, y) et son comorphisme $\iota^\sharp : \mathbb{k}[\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}] \rightarrow \mathbb{k}[\mathfrak{g}]$. Puisque $\text{pr}_1((x, x)) = x$, il suffit de prouver que $\iota(x) = (x, x)$ est dans l'adhérence de $G.(\mathbb{k}z, \mathfrak{g}^z)$. Soit donc $\varphi \in \mathbb{k}[\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}]$ tel que $\varphi((x, x)) = \iota^\sharp(\varphi)(x) \neq 0$. Par le rappel ci-dessus il existe $(\lambda, g) \in (\mathbb{k}, G)$ tel que $\varphi(g.\lambda z, g.\lambda z) = \iota^\sharp(\varphi)(g.\lambda z) \neq 0$. Mais $(g.\lambda z, g.\lambda z) = g.(\lambda z, \lambda z) \in G.(\mathbb{k}z, \mathfrak{g}^z)$, d'où le résultat. \square

Proposition 4.2.3. *Soit $(x, y) \in \mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ avec x élément distingué de \mathfrak{g} . Alors $(x, y) \in \mathfrak{E}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Adoptons les notations du début de la sous-section. Par la Proposition 4.2.1 il vient $(x, y) \in (x, \mathfrak{g}^x) \subset \overline{G.(\mathbb{k}h, \mathfrak{g}^h)}$. Or, $G.(\mathbb{k}h, \mathfrak{g}^h) \subset \mathfrak{E}(\mathfrak{g})$ grâce au Lemme 4.1.2. Comme $\mathfrak{E}(\mathfrak{g})$ est fermé on en déduit que $(x, y) \in \mathfrak{E}(\mathfrak{g})$. \square

5 Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente, un théorème de Premet

Le but de cette section est de présenter la démonstration du théorème de Premet ([Pr], section 2) dans le cas d'une algèbre de Lie réductive \mathfrak{g} définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. On considérera également G , le groupe adjoint de \mathfrak{g} . Ce théorème décrit les composantes irréductibles de la variété $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, où \mathcal{N} désigne le cône des éléments nilpotents de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Théorème 5.0.4. *Soient e_1, \dots, e_r des représentants des orbites distinguées nilpotentes dans \mathfrak{g} . Alors les ensembles fermés $\mathfrak{C}(e_i) = \overline{G \cdot (e_i, \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^{e_i})}$ sont deux à deux disjoints et ont tous la même dimension égale à $n := \dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, ce sont de plus les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$.*

5.1 Élagage du problème

Comme \mathfrak{g} est réductive, on peut écrire $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus \mathfrak{z}$ où les éléments de \mathfrak{z} sont semi-simples. On peut donc supposer que \mathfrak{g} et G sont semi-simples. Soit e un élément nilpotent de \mathfrak{g} . Par le théorème de Jacobson-Morozov, on peut trouver un \mathcal{S} -triplet de \mathfrak{g} de la forme (e, h, f) . On gradue alors $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}(i, h)$. Par la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 , on a $\mathfrak{g}^e \subset \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i, h)$ et $\mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{c}(e, i)$, où $\mathfrak{c}(e, i) = \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}(i, h)$. La sous-algèbre $\mathfrak{c}(e, 0)$ est le centralisateur de (e, h, f) dans \mathfrak{g} , elle est donc réductive dans \mathfrak{g} (cf 1.1.3). Il s'en suit que $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i > 0} \mathfrak{c}(e, i)$ (1.4.5) et la variété

$$\mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e = \mathcal{N}(\mathfrak{c}(e, 0)) + \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e \cong \mathcal{N}(\mathfrak{c}(e, 0)) \times \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$$

est irréductible, le cône nilpotent d'une algèbre de Lie réductive étant irréductible ([TY] 34.3.4). On considère donc naturellement la sous-variété irréductible

$$\mathfrak{C}(e) := \overline{G \cdot (\mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e)} \subseteq \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}).$$

Cet objet est de plus invariant sous l'action de G : pour tout $g \in G$, $\mathfrak{C}(e) = \mathfrak{C}((\text{Ad } g)e)$. Or il existe un nombre fini d'orbites nilpotentes. Soient e_1, \dots, e_s des représentants des orbites nilpotentes, alors $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{C}(e_1) \cup \dots \cup \mathfrak{C}(e_s)$. On peut donc dire que les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ sont des $\mathfrak{C}(e_i)$.

Intéressons-nous à la dimension de ces sous-variétés irréductibles.

Proposition 5.1.1 (Baranovsky). *La variété $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ est une variété de dimension n . Ses composantes irréductibles de dimension n sont les $\mathfrak{C}(e_i)$ où les e_i sont des représentants des orbites distinguées.*

Démonstration. Par définition de $\mathfrak{C}(e_i)$, le morphisme

$$\xi : \begin{array}{ccc} G \times (\mathfrak{g}^{e_i} \cap \mathcal{N}) & \mapsto & \mathfrak{C}(e_i) \\ (g, x) & \mapsto & ((\text{Ad } g)e_i, (\text{Ad } g)x) \end{array}$$

est dominant. Pour tout $x \in \mathfrak{g}^{e_i} \cap \mathcal{N}$, la fibre $\xi^{-1}(e_i, x)$ est égale à $\{(g, (\text{Ad } g)^{-1}x) \mid g \in C_G(e_i)\} \cong C_G(e_i)$. On en déduit que

$$\dim \mathfrak{C}(e_i) = \dim G + \dim \mathfrak{g}^{e_i} \cap \mathcal{N} - \dim C_G(e_i) \leq n.$$

De plus $\dim \mathfrak{C}(e_i) = n$ si et seulement si $\dim \mathfrak{g}^{e_i} \cap \mathcal{N} = \dim C_G(e_i)$, c'est à dire e_i est distingué.

Il reste à voir, pour montrer que $\dim \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}) = n$, qu'il existe une orbite distinguée. On peut montrer que l'orbite régulière satisfait les conditions ([TY], 35.1.4).

Montrons maintenant que deux orbites distinguées distinctes donnent des composantes irréductibles distinctes. Soit e_i un représentant d'une orbite nilpotente $\mathcal{O}(e_i)$. En notant $\text{pr}_1 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ la projection par rapport à la première variable, un analogue du lemme 4.2.2 nous donne $\text{pr}_1(\mathfrak{C}(e_i)) = \overline{\mathcal{O}(e_i)}$. Les ensembles $\mathfrak{C}(e_i)$ sont donc deux à deux distincts. \square

5.2 Éléments presque distingués

On va maintenant s'intéresser à une classe spéciale d'éléments nilpotents de \mathfrak{g} .

Définition 5.2.1. *Un élément nilpotent $e \in \mathfrak{g}$ est dit presque distingué, si \mathfrak{g}^e est une sous-algèbre de Lie résoluble.*

Remarquons que si e est distingué, alors \mathfrak{g}^e est une algèbre de Lie nilpotente et e est presque distingué. Remarquons aussi que e est presque distingué si et seulement si \mathfrak{g}^e est égal à son radical $\mathfrak{z}(\mathfrak{c}(e, 0)) \oplus \bigoplus_{i>0} \mathfrak{c}(e, i)$; c'est à dire, si et

seulement si $\mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{c}(e, i) = \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$.

Nous allons maintenant effectuer notre première réduction du problème :

Proposition 5.2.2. *Chaque composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ est de la forme $\mathfrak{C}(e)$ pour un élément presque distingué $e \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration.

(1) Le groupe $\text{GL}(2)$ agit sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot (x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

Comme, une combinaison linéaire de deux éléments de \mathcal{N} qui commutent, est encore dans \mathcal{N} , la variété $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ est invariante sous l'action de $\text{GL}(2)$. Or $\text{GL}(2)$ est un groupe connexe, donc chaque composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ est invariante sous $\text{GL}(2)$, en particulier sous l'involution $\sigma : (x, y) \mapsto (y, x)$ de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

(2) Soit $e \in \mathcal{N}$ tel que $\mathfrak{C}(e)$ soit une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ et on note \mathcal{O} la G -orbite de e . Par la partie 1, $\mathfrak{C}(e)$ est σ -stable. Par ailleurs, l'application $\text{pr}_1 : (x, y) \mapsto x$ envoie $G \cdot (e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e)$ sur \mathcal{O} , donc envoie $\mathfrak{C}(e) = \overline{G \cdot (e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e)}$ sur $\overline{\mathcal{O}}$. Cela nous donne en particulier :

$$\mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e = (\text{pr}_1 \circ \sigma)(e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e) \subset \overline{\mathcal{O}}.$$

(3) On veut montrer que l'élément e est presque distingué. Pour cela raisonnons par l'absurde. Supposons que $\mathfrak{c}(e, 0)$ contienne un élément nilpotent non nul e_0 . On a $e + e_0 \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e$, donc $e + e_0 \in \overline{\mathcal{O}}$, par la partie 2. Comme $\mathfrak{c}(e, 0)$ est réductif, par Jacobson Morozov, il existe un \mathcal{S} -triplet (e_0, h_0, f_0) dans $\mathfrak{c}(e, 0) = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(e, h, f)$. On en déduit que $(e + e_0, h + h_0, f + f_0)$ est un \mathcal{S} -triplet de \mathfrak{g} . En posant, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\gamma_\lambda = \exp(\text{ad } \lambda^{-1}e_0) \exp(-\text{ad } \lambda f_0) \exp(\text{ad } \lambda^{-1}e_0)$, on peut montrer après un calcul fastidieux que $\gamma_1 \circ \gamma_\lambda$ envoie $e + e_0$ sur $e + \lambda^2 e_0$. D'où $e + \mathbb{K}^* e_0 \in \overline{\mathcal{O}(e + e_0)}$ et en particulier $e \in \overline{\mathcal{O}(e + e_0)}$. On en déduit que $\overline{\mathcal{O}(e + e_0)} = \overline{\mathcal{O}}$. Les éléments e et $e + e_0$ sont donc G -conjugués, ce qui implique que h et h_0 le sont également.

(4) Comme $\mathfrak{g}(0, h)$ est réductive, on a $[\mathfrak{g}(0, h), \mathfrak{g}(0, h)] \oplus \mathfrak{z}'$ où \mathfrak{z}' est le centre de $\mathfrak{g}(0, h)$. On a $h_0 \in [\mathfrak{g}(0, h), \mathfrak{g}(0, h)]$ et $h \in \mathfrak{z}'$, on peut donc écrire $h_0 = [h', h'']$ avec $h', h'' \in \mathfrak{g}(0, h)$, et alors $K(h, h_0) = K(h, [h', h'']) = K([h', h], h'') = 0$. Ceci implique que $K(h + h_0, h + h_0) = K(h, h) + K(h_0, h_0)$. Mais h et $h + h_0$ sont conjugués et K est invariante sous l'action de G , ce qui impliquerait que $K(h_0, h_0) = 0$ et $h_0 = 0$. Ceci est impossible par le choix de e_0 . On a donc montré par l'absurde que e est presque distingué. \square

5.3 Orbites nilpotentes induites

Pour la prochaine étape, on va chercher à associer à un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) , un "joli" \mathcal{S} -triplet $(\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f})$ de sorte que \tilde{e} soit distingué dans \mathfrak{g} . Cette étape est indépendante de ce qui précède. Nous allons utiliser la théorie de Bala-Carter. Fixons maintenant le cadre de notre étude.

On fixe une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} et on note $\Phi = \Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, le système de racines découlant de l'action adjointe de \mathfrak{h} sur \mathfrak{g} . On choisit une base $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, et on note Φ^+ le système de racines positives associées. Soit e un élément nilpotent. Par la théorie de Bala-Carter : $\mathcal{N} = \bigcup_{(I, J) \in P(\Delta)} \mathcal{O}_{I, J}$ (3.2.7), donc il

existe $J \subseteq I \subseteq \{1, \dots, n\}$ avec $\mathfrak{p}_{I, J}$ distingué dans \mathfrak{l}_I , tel que e soit un élément de Richardson de $\mathfrak{p}_{I, J}$ dans \mathfrak{l}_I . On choisit alors $h_{I, J} \in \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I]$ représentant notre parabolique $\mathfrak{p}_{I, J}$ dans \mathfrak{l}_I , c'est à dire tel que :

$$\alpha_i(h_{I, J}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in J \\ 2 & \text{si } i \in I \setminus J. \end{cases}$$

On peut alors écrire (cf section 1.3)

$$\mathfrak{p}_{I, J} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{l}_I(i, h_{I, J}), \quad \mathfrak{l}_I = \mathfrak{l}_I(0, h_{I, J}), \quad \mathfrak{m}_{I, J} = \bigoplus_{i \geq 2} \mathfrak{l}_I(i, h_{I, J}).$$

Utilisons maintenant le fait que $\mathfrak{p}_{I, J}$ soit distingué dans \mathfrak{l}_I . Par la proposition 3.2.6, $(\text{Ad } R_u(P_{I, J}))e$ rencontre $\mathfrak{l}_I(2; h_{I, J})$. On supposera donc désormais que $e \in \mathfrak{l}_I(2; h_{I, J})$, et on pose $h := h_{I, J}$. Par le lemme 3.1.5, il existe $f \in \mathfrak{l}_I(-2; h)$ tel que (e, h, f) soit un \mathcal{S} -triplet.

Grâce au lemme suivant, nous allons pouvoir effectuer la même démarche à l'échelle de \mathfrak{g} .

Lemme 5.3.1. *La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_J = \mathfrak{p}_{\Delta, J}$ est distinguée dans \mathfrak{g} .*

Démonstration. Calculons :

$$\begin{aligned} \dim \mathfrak{g}(2, J) &= \text{Card}\{\alpha \in \Phi \mid \eta_J(\alpha) = 2\} \\ &\geq |\Delta \setminus \Delta_I| + \text{Card}\{\alpha \in \Phi_I \mid \eta_J(\alpha) = 2\} \\ &= l - |I| + \dim \mathfrak{l}_I(2, J) \\ &= l - |I| + \dim[\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I](0, J). \end{aligned}$$

Par ailleurs $\dim \mathfrak{g}(0, J) = l + |\Phi_J| = l - |I| + \dim[\mathfrak{l}_I, \mathfrak{l}_I](0, J)$. Donc $\dim \mathfrak{g}(2, J) \geq \dim \mathfrak{g}(0, J)$. La réciproque vient de (3.2.4). \square

Avec les notations de la section 1.3, on définit l'élément $\tilde{h} := h_{\mathfrak{p}_J}$ représentant notre parabolique \mathfrak{p}_J dans \mathfrak{g} . Grâce au lemme 5.3.1 et à 3.2.6, on peut trouver un élément de Richardson $\tilde{e} \in \mathfrak{g}(2, \tilde{h})$ associé au parabolique \mathfrak{p}_J . Le lemme 3.1.5 nous donne alors un élément \tilde{f} tel que $(\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f})$ soit un \mathcal{S} -triplet. Les propriétés suivantes découlent de façon immédiate :

$$\mathfrak{g}(0, \tilde{h}) = \mathfrak{l}_J, \quad \mathfrak{g}(i, \tilde{h}) \cap \mathfrak{l}_I = \mathfrak{l}_I(i, h), \quad [\tilde{h}, h] = 0, \quad [\tilde{h}, e] = 2e. \quad (1)$$

On aura enfin besoin du lemme suivant dans la suite de la démonstration du théorème de Premet.

Lemme 5.3.2. *L'endomorphisme $\text{ad } \tilde{h}$ agit sur $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$ et ce, de façon inversible si e est presque distingué.*

Démonstration. On sait depuis 5.1 que $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}(i, h) \cap \mathfrak{g}^e$. Or $[\tilde{h}, e] = 2e$ et $[\tilde{h}, h] = 0$ donc \mathfrak{g}^e et $\mathfrak{g}(i, h)$ sont invariant par $\text{ad } \tilde{h}$. En conséquence, il en est de même pour $\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e \cap \ker \text{ad } \tilde{h} &= \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{g}(0, \tilde{h}) = \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{l}_J \\ &= \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{l}_I(0, h) \subseteq \text{nil}_{\mathfrak{g}} (\mathfrak{g}^e \cap \mathfrak{l}_I(0, h)). \end{aligned}$$

Or l'algèbre $\mathfrak{l}_I(0, h) \cap \mathfrak{g}^e$ est le centralisateur dans \mathfrak{l}_I du \mathcal{S} -triplet (e, h, f) , elle est donc réductive dans \mathfrak{l}_I et dans \mathfrak{g} . Son nilradical est donc nul (1.4.3). \square

5.4 Une variété conique

On se place maintenant dans un cadre beaucoup plus général pour introduire un nouvel élément. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{k} . Etant donné un idéal I de $S(V^*)$, on va définir l'idéal homogène associé à I . Pour $0 \neq f \in I$ on écrit $f = \sum_{j=0}^m f_j$ avec $f_j \in S(V^*)$, $f_m \neq 0$, et on pose $\text{gr}(f) = f_m$.

L'idéal homogène associé à I est l'idéal $\text{gr } I$ engendré par les $\text{gr}(f)$, $0 \neq f \in I$.

Étant donnée une sous-variété affine $X \subset V$ on note $I_X \subset S(V^*)$ son idéal (radiciel) de définition. On appelle alors cône associé à X et on note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \{v \in V \mid f(v) = 0, \quad \forall f \in \text{gr } I_X\} \subset V.$$

Voici quelques propriétés de $\mathbb{K}(X)$ qui se révéleront nécessaires pour la suite, mais dont la preuve, que j'ai néanmoins traduite ci-dessous, ne présente pas un grand intérêt pour la compréhension globale de l'article.

Lemme 5.4.1 ([Kr] II.4.2).

- (i) $\mathbb{K}(X)$ est un cône fermé de V .
- (ii) La transformation $X \mapsto \mathbb{K}(X)$ conserve l'inclusion, et vérifie $\mathbb{K}(X \cup Y) = \mathbb{K}(X) \cup \mathbb{K}(Y)$.
- (iii) Si G est un groupe algébrique, V un G -module, et X une sous-variété G -stable, alors $\mathbb{K}(X)$ est un cône G -stable.
- (iv) $\mathbb{K}(X) \subset \overline{\mathbb{K}^*X}$ et $\dim \mathbb{K}(X) = \dim X$. Si X est irréductible alors $\mathbb{K}(X)$ est équidimensionnelle.

Démonstration.

- (i) Cela découle directement du fait que $\text{gr } I_X$ est un idéal gradué.
- (ii) Si $X \subseteq Y$ alors $I_Y \subseteq I_X$, d'où $\text{gr } I_Y \subseteq \text{gr } I_X$ et enfin $\mathbb{K}(X) \subseteq \mathbb{K}(Y)$. Pour la dernière égalité, il suffit de remarquer que

$$\text{gr } I_X \cdot \text{gr } I_Y \subseteq \text{gr } (I_X \cdot I_Y) \subseteq \text{gr } I_X \cap \text{gr } I_Y.$$

- (iii) Il suffit de voir que si l'idéal I_X est G -stable, alors $\text{gr } I_X$ l'est également.
- (iv) L'idéal $I_{\overline{\mathbb{K}^*X}}$ est un idéal homogène contenu dans I_X , donc il est également contenu dans $\text{gr } I_X$. d'où la première assertion.

Intéressons-nous maintenant à l'espace vectoriel $V \times \mathbb{k}$. Soit $X' = \mathbb{k}^*(X \times \{1\})$ et $Z = \overline{X'}$. On appelle $\eta : Z \rightarrow \mathbb{k}$ la restriction à Z de la projection par rapport à la seconde variable. Il est possible de voir que $\eta^{-1}(\lambda) = \lambda X \times \{\lambda\} \cong X$ et $\eta^{-1}(0) = \mathbb{K}(X) \times \{0\} \cong \mathbb{K}(X)$. Pour montrer cela, on va considérer l'anneau des fonctions régulières sur $V \times \mathbb{k}$, que l'on identifiera à $S(V^*)[T]$.

(a) Dans un premier temps on considère $\lambda \in \mathbb{k}^*$. Pour un élément homogène $f = \sum_{i=0}^d f_i T^{d-i} \in S(V^*)[T]$, on a $f(\lambda x, \lambda) = \lambda^d \sum_{i=0}^d f_i(x)$. On a alors équivalence

entre $f \in I_Z$ et $\sum_{i=0}^d f_i \in I_X$. Donc I_Z est graduée, et $(z, \lambda) \in \eta^{-1}(\lambda)$, si et seulement si $z = \lambda x$ pour un $x \in X$. Cela revient à dire que $\eta^{-1}(\lambda) = \lambda X \times \{\lambda\} \cong X$.

(b) Pour $g = \sum_{i=0}^d g_i \in S(V^*)$, $g_d \neq 0$, on pose $\tilde{g} = \sum_{i=0}^d g_i T^{d-i}$. On a $I'_X = \langle \tilde{g} \mid g \in I_X \rangle$. On a ensuite $\tilde{g}(v, 0) = (\text{gr } g)(v)$. D'où

$$(v, 0) \in Z \Leftrightarrow \tilde{g}(v, 0) = 0, \forall g \in I_X \Leftrightarrow (\text{gr } g)(v) = 0, \forall g \in I_X \Leftrightarrow v \in \mathbb{K}(X).$$

Par construction, on sait que $\dim Z = \dim X + 1$. Or $\mathbb{K}(X) \times \{0\} \subsetneq Z$, donc $\dim \mathbb{K}(X) \leq \dim X$. Enfin, comme $\mathbb{K}(X)$ est une fibre de η , toutes ses composantes irréductibles sont de dimension $\geq \dim X$. On a finalement montré que $\mathbb{K}(X)$ est une variété équidimensionnelle, de dimension $\dim X$. \square

Étant donné un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) dans \mathfrak{g} , on note $\mathcal{S}(h, e) := \overline{G \cdot (h, e)} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Le résultat suivant permettra d'obtenir l'équidimensionnalité de $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g})$ dans la preuve du théorème final.

Proposition 5.4.2. *Soit (e, h, f) un \mathcal{S} -triplet de \mathfrak{g} avec e distingué. Alors il existe des représentants e_1, \dots, e_s d'orbites nilpotentes distinguées tels que $\mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e)) = \mathfrak{C}(e_1) \cup \dots \cup \mathfrak{C}(e_k)$.*

Démonstration.

(1) Comme $[h, e] = 2e$, toute paire $(u, v) \in G.(h, e)$ vérifie $[u, v] = 2v$. Alors $\mathcal{S}(h, e) \subseteq \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] - 2y = 0\}$. On a donc

$$\mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e)) \subseteq \mathbb{K}(\{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] - 2y = 0\}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{g}).$$

Soient $x_1 \dots x_n$ et $y_1 \dots y_n$ les fonctions coordonnées sur $\mathfrak{g} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathfrak{g}$. On sait ([TY], 31.1.6) que l'algèbre invariante $S(\mathfrak{g}^*)^G$ est librement engendrée par l polynômes homogènes f_1, \dots, f_l et que \mathcal{N} est la variété d'annulation de ces polynômes ([TY], 31.2.6). Comme $\mathcal{S}(h, e) \subset (\text{Ad } G)h \times \mathcal{N}$, tous les polynômes $f_i(x_1, \dots, x_n) - f_i(h)$ et $f_i(y_1, \dots, y_n)$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ s'annulent sur $\mathcal{S}(h, e)$. On a donc $\mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e)) \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. D'où

$$\mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e)) \subseteq \mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{g}).$$

(2) On veut montrer que $\dim \mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e)) = n$. Pour cela, on considère le morphisme $\psi : \begin{array}{ccc} G & \mapsto & \mathcal{S}(h, e) \\ g & \mapsto & ((\text{Ad } g)h, (\text{Ad } g)e) \end{array}$. Il est dominant et la fibre $\psi^{-1}(h, e)$, est le stabilisateur de (h, e) dans G ; c'est un sous-groupe d'algèbre de Lie $\mathfrak{c}(e, 0)$. Mais comme e est distingué, $\mathfrak{g}^e \subset \mathcal{N}$ et donc $\mathfrak{c}(e, 0) = \{0\}$. On a donc $n = \dim G = \dim \mathcal{S}(h, e)$. Or $\mathcal{S}(h, e)$ est irréductible, la dimension de toutes les composantes irréductibles de $\mathbb{K}(\mathcal{S}(h, e))$ vaut donc précisément n (5.4.1).

(3) Il suffit maintenant de réunir les résultats de (1), (2) et 5.1.1 pour conclure. \square

5.5 Le résultat tant attendu

Nous avons maintenant tous les outils en main pour démontrer le théorème 5.0.4. Soit e un élément presque distingué. Grâce à la proposition 5.2.2, il suffit de montrer que $\mathfrak{C}(e) \subset \mathfrak{C}(e_i)$ pour un élément distingué e_i .

Comme $\mathfrak{C}(e) = \mathfrak{C}((\text{Ad } g)e)$, on peut supposer que e satisfait les conditions de (5.3). Plus précisément, on inclut e dans un \mathcal{S} -triplet (e, h, f) et on considère le \mathcal{S} -triplet $(\tilde{e}, \tilde{h}, \tilde{f})$ associé où \tilde{e} est distingué (cf 5.3). Tout ce qui nous importe est le fait que ces éléments vérifient les équations (1) et le lemme 5.3.2. Grâce à la proposition 5.4.2, on voit qu'il suffit de montrer que $\mathfrak{C}(e) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{S}(\tilde{h}, \tilde{e}))$, ce que nous allons nous empresser de faire.

Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\tilde{h}, \tilde{e})$ et $L = C_G(\tilde{h})$. Comme $\dim \mathfrak{g}(0, \tilde{h}) = \dim \mathfrak{g}(2, \tilde{h})$ et $\mathfrak{c}(\tilde{e}, 0) = \{0\}$ (\tilde{e} est distingué), l'orbite $(\text{Ad } L)\tilde{e}$ est ouverte dans $\mathfrak{g}(2, \tilde{h})$. Or \mathcal{S} est L -stable et fermé, donc $(\tilde{h}, \mathfrak{g}(2, \tilde{h})) \subset \mathcal{S}$. Or $[\tilde{h}, e] = 2e$, donc $(\tilde{h}, \mathfrak{k}e) \subset \mathcal{S}$.

On sait par 5.1, et 1.4.5 que :

$$\mathcal{L}(R_u(C_G(e))) = \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e = \bigoplus_{i>0} \mathfrak{c}(e, i).$$

Comme le groupe $R_u(C_G(e))$ est unipotent, l'orbite $(\text{Ad } R_u(C_G(e)))\tilde{h}$ est fermée dans $\tilde{h} + \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$ ([Di] 11.2.4). Or $[\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e, \tilde{h}] = \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$ par le lemme 5.3.2, donc $(\text{Ad } R_u(C_G(e)))\tilde{h} = \tilde{h} + \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e$. Comme \mathcal{S} est G -stable et $(\tilde{h}, \mathfrak{k}e) \subset \mathcal{S}$, il s'ensuit que $(\tilde{h} + \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e, \mathfrak{k}e) \subset \mathcal{S}$. Mais alors $\mathbb{K}((\tilde{h} + \text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e, \mathfrak{k}e)) = (\text{nil}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g}^e, \mathfrak{k}e) \subset \mathbb{K}(\mathcal{S})$, par le lemme 5.4.1. Maintenant $\mathbb{K}(\mathcal{S})$ est G -stable et e est presque distingué dans \mathfrak{g} . On obtient finalement que $G.(\mathcal{N} \cap \mathfrak{g}^e, e) \subset \mathbb{K}(\mathcal{S})$, d'où $\mathfrak{C}(e) \subseteq \mathbb{K}(\mathcal{S})$. Notre preuve est enfin complète.

Conclusion

Ben voilà, c'est terminé. C'était bien hein? Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes : la variété commutante est irréductible, on peut indexer les composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente... C'est cool quoi.

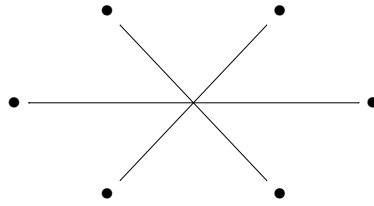
A Annexe : Cas A_n

Ici, on s'occupe du cas $G = \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{k})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{k})$. On note $(e_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$, et $E_{i,j} = \mathbb{k}e_{i,j}$. Les résultats de structures sur les algèbres de Lie et les groupes algébriques se traduisent aisément dans ce cas :

- Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , \mathfrak{h} est diagonalisable maximale et est donc conjugué à $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{d}(n+1, \mathbb{k}) \cap \mathfrak{g}$. On supposera désormais $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$. De même tout tore maximal de G est conjugué à $D_n(\mathbb{k}) \cap G$.
- Pour $1 \leq i \leq n+1$, on pose ε_i la i -ème fonction coordonnée sur \mathfrak{h} . Pour $1 \leq i \leq n$, on pose $\alpha_{i,j} = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \mathfrak{h}^*$
- La sous-algèbre \mathfrak{h} stabilise les sous-espaces $E_{i,j}$ ($i \neq j$) par ad : si $x \in E_{i,j}$, $h \in \mathfrak{h}$ alors $[h, x] = (\varepsilon_i(h) - \varepsilon_j(h))x$
- Les racines de \mathfrak{g} sont les $n(n+1)$ éléments $\alpha_{i,j} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$.
- Les coracines sont les $h_{i,j} = \alpha_{i,j}^\vee = e_{i,i} - e_{j,j}$. On a bien $\alpha_{i,j}(h_{i,j}) = 2$.
- La même étude du point vue des groupes nous donne $\Phi(T, G) = \{\chi_i \chi_j^{-1} \mid i \neq j\}$ où χ_i est la i -ème fonction coordonnée sur T . Les groupes radiciels U_α sont les $\mathrm{Id} + E_{i,j}$. Les coracines sont les cocaractères $\lambda_{i,j} = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, t, 1, \dots, 1, t^{-1}, 1, \dots, 1)$
- Une base de \mathfrak{h}^* est donnée par $\alpha_{i,i+1}$. On a

$$\langle \alpha_{i,i+1}, \alpha_{j,j+1} \rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{si } |i - j| \geq 2 \end{cases}$$

Par exemple, le système de racines de \mathfrak{sl}_3 peut se représenter ainsi :



- L'ensemble $\Delta = \{\alpha_{i,i+1} \mid i \in [1, n]\}$ forme une base de ce système de racines. On pose $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}$.
- L'action de $h_i := h_{i,i+1}$ sur \mathfrak{g} se fait par multiplication sur les sous-espaces

radiciels $E_{i,j}$ par les coefficients suivants :

$$\begin{pmatrix} (0) & -1 & 1 & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 \dots 1 & -1 & 1 & 1 \dots 1 \\ -1 \dots -1 & 0 & 2 & -1 \dots -1 \\ (0) & -2 & 0 & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0) & -1 & 1 & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (0) & -1 & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

- Les sous-algèbres de Borel sont conjuguées à $\mathfrak{b} := \mathfrak{t}_{n+1} \cap \mathfrak{g}$, où \mathfrak{t}_{n+1} représente l'ensemble des matrices triangulaires supérieures. Le Borel \mathfrak{b} est la sous-algèbre de Borel associée à Δ . Par exemple, pour \mathfrak{sl}_5 :

$$\mathfrak{b} \cong \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

- Les sous-algèbres paraboliques standards, sont l'un des \mathfrak{p}_I où $I \subset \Delta$. Par exemple, énumérons-les dans le cas de \mathfrak{sl}_4 :

$$\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{b}; \mathfrak{p}_{\{1\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{p}_{\{2\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{p}_{\{3\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{p}_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{p}_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}; \mathfrak{p}_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \mathfrak{p}_\Delta = \mathfrak{g}.$$

- Les facteurs de Levi sont :

$$\mathfrak{l}_\emptyset = \mathfrak{b}; \mathfrak{l}_{\{1\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{l}_{\{2\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{l}_{\{3\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix};$$

$$\mathfrak{l}_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}; \mathfrak{l}_{\{1,3\}} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}; \mathfrak{l}_{\{2,3\}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}; \mathfrak{l}_\Delta = \mathfrak{g}.$$

- On peut également, pour chacun d'entre eux, trouver un élément x_I appartenant à la G -orbite des éléments de Richardson de \mathfrak{p}_I . Nous pouvons choisir x_I sous sa forme de Jordan $J_{a_1}, \dots, J_{a_{r_I}}$.

$$x_\emptyset = J_4 \mid x_{\{1\}} = x_{\{2\}} = x_{\{3\}} = J_3, J_1 \mid x_{\{1,2\}} = x_{\{1,3\}} = x_{\{2,3\}} = J_2, J_1, J_1 \mid x_\Delta = J_1, J_1, J_1, J_1 = 0.$$

- Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_i = \text{Diag}(i-1, i-3, \dots, -i+3, -i+1)$. Par la théorie des représentations de \mathfrak{sl}_2 , il existe $y_i \in \mathfrak{sl}_i$ tel que (J_i, t_i, y_i) soit un \mathcal{S} -triplet. Étant donné $x_I = J_{a_1}, \dots, J_{a_r}$, on pose $t_I = \text{Diag}(t_{a_1}, \dots, t_{a_r})$ et $y_I = \text{Diag}(y_{a_1}, \dots, y_{a_r})$, de sorte que (x_I, t_I, y_I) soit un \mathcal{S} -triplet.
- On a $\alpha_i(t_\emptyset) = 2$ pour tout $i \in N$. On en déduit que $\dim \mathfrak{g}(0, t_\emptyset) = n = \dim \mathfrak{g}(2, t_\emptyset)$. L'orbite régulière (ou encore principale) est donc distinguée. Maintenant si $I \neq \emptyset$, alors $a_1 \leq n$ et $[h_{a_1}; x_I] = 0$, donc x_I n'est pas distingué.
- Si on applique le résultat de Premet (section 5) on obtient, grâce à la remarque ci-dessus, que $\mathfrak{C}^{\text{nil}}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ est irréductible.
- Il est facile également de voir que x_I est distingué dans \mathfrak{l}_I . Ce qui vient confirmer le théorème (3.2.7) : $\mathcal{N} = \bigcup_{I \subset \Delta} \mathcal{O}_{I, \emptyset}$.
- Pour des résultats plus poussés sur les orbites de \mathfrak{sl}_{n+1} , se référer à [Co]. Il y est développé la théorie des partitions et des diagrammes de Young associés. Ce qui permet notamment d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour les inclusions d'orbites nilpotentes les unes dans les autres. On peut aussi obtenir une description d'objets comme $\mathfrak{g}(0, t_I)$, ce qui devrait nous aider à décrire les éléments presque distingués.

B Annexe : Définitions et théorie générale

Groupe algébrique connexe G	Relations entre le groupe et son algèbre de Lie	Algèbre de Lie \mathfrak{g}
On appelle radical de G et on note $R(G)$, le plus grand sous-groupe connexe normal résoluble de G .	$\mathcal{L}(R(G)) = \text{rad } \mathfrak{g}$ ([TY], 27.1.3)	On appelle radical de \mathfrak{g} et on note $\text{rad } \mathfrak{g}$ le plus grand idéal résoluble de \mathfrak{g} .
G est dit semi-simple si $R(G) = \{e\}$. Si de plus G est connexe : $G = (G, G)$.	\Leftrightarrow ([TY], 27.2.2)	\mathfrak{g} est dit semi-simple si $\text{rad } (\mathfrak{g}) = \{0\} \Leftrightarrow L$ est non dégénérée. Dans ce cas, $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
On peut associer à une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} le groupe algébrique affine $G_{ad} \subset \text{Aut } \mathfrak{g}$, engendré par les automorphismes de la forme $\exp(\text{ad } n)$, où n est un élément nilpotent de \mathfrak{g} . On a $\mathcal{L}(G) = \mathfrak{g}$ et G est semi-simple. On l'appelle le groupe adjoint de \mathfrak{g} .		
Décomposition de Jordan de $\alpha \in G$: décomposition de $\rho_\alpha \in \text{GL}(\mathcal{A}(G))$, il existe α_s et $\alpha_u \in G$ tels que $\rho_{\alpha_s} = (\rho_\alpha)_s$ et $\rho_{\alpha_u} = (\rho_\alpha)_u$ ([TY], 22.2).		Décomposition de Jordan de $x \in \mathfrak{g}$: $\eta(x) \in \text{Der}(\mathcal{A}(G)) \subset \mathfrak{gl}(\mathcal{A}(G))$ ([TY], 23.6). Si \mathfrak{g} est semi-simple alors la décomposition de Jordan de x coïncide avec celle de $\text{ad } (x)$ ([TY], 20.4.4).
Si $G \subset \text{GL}(V)$, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, alors ces définitions coïncident avec la décomposition de Jordan usuelle ([TY], 22.2.3, 23.6.4).		
On appelle radical unipotent de G et on note $R_u(G)$, le plus grand sous-groupe connexe normal unipotent de G .	$\text{nil } \mathfrak{g} \subseteq \mathcal{L}(R_u(G))$ ([TY], 27.1.3) $\mathcal{L}(R_u(G)) \subset \text{Imax } \mathfrak{g}$ $\mathcal{L}(R_u(G)) = \text{nil}_{\mathfrak{gl}(V)} \mathfrak{g}$	On appelle radical nilpotent de \mathfrak{g} et on note $\text{nil } \mathfrak{g}$ l'idéal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \text{rad } \mathfrak{g}$. On notera $\text{Imax } \mathfrak{g}$ le plus grand idéal nilpotent de \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, on note $\text{nil}_{\mathfrak{gl}(V)} \mathfrak{g}$ et on appelle nilradical de \mathfrak{g} (dans $\mathfrak{gl}(V)$), le plus grand idéal constitué d'éléments nilpotents (cf [TY], 19.5.5). Si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$, avec \mathfrak{g}' semi-simple, on peut définir de cette façon le nilradical de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g}' grâce aux représentations de \mathfrak{g}' .
G est dit réductif si $R_u(G) = \{e\}$. Alors $G = (G, G).Z(G)^\circ$	\Leftrightarrow ([TY], 27.2.2)	\mathfrak{g} est dite réductive si $\text{nil } (\mathfrak{g}) = \{0\}$ et son centre est constitué d'éléments semi-simples. Dans ce cas, $\mathfrak{g} = D(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
Soit $i_\alpha : G \rightarrow G$ $\beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}$. On pose $\text{Ad } (\alpha) = \text{di}_\alpha \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \text{GL}(\mathfrak{g})$.	$\text{d Ad} = \text{ad}$ ([TY], 23.5.5)	$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ $x \mapsto (y \mapsto [x, y])$.
Un sous-groupe $T \subset G$ est un tore si il est isomorphe à $D_n(\mathbb{k})$.		Dans le cas où \mathfrak{g} est semi-simple, on dit qu'une sous-algèbre $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ est un tore si tous ses éléments sont semi-simples.
Les centralisateurs des tores sont connexes, réductifs ([Hu]).		Les centralisateurs des tores sont réductifs dans \mathfrak{g} ([TY], 20.5.13).
Les sous-groupes de Cartan sont les $C = C_G(T)$ où T est un tore $\Leftrightarrow C$ est connexe nilpotent maximal et $C = N_G(C)^\circ$	\Leftrightarrow ([TY], 29.2.5)	les sous-algèbres de Cartan sont les sous-algèbres nilpotentes \mathfrak{h} vérifiant $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.
Les Cartans et les tores maximaux coïncident si G est réductif ([Hu], 26.2.A, [TY], 20.6.2).		
Un sous-groupe de Borel est un sous-groupe connexe résoluble maximal. Tous les Borels sont conjugués ([Hu], 22.2, 23.2). $G = \bigcup_{x \in G} xBx^{-1}, N_G(B) = B.$	\Leftrightarrow ([TY], 29.4.3)	Une sous-algèbre de Borel est une sous-algèbre résoluble maximale. Elles sont toutes conjuguées entre elles.

Un sous-groupe parabolique est un sous-groupe contenant un Borel. Il est de plus connexe et $N_G(P) = P$.	\Leftrightarrow ([TY], 29.4.3)	Une sous-algèbre parabolique est une sous-algèbre contenant un Borel.
Un tore T agit de façon diagonale sur \mathfrak{g} (par Ad) et on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(T) \oplus \bigoplus_{\beta \in X(T) \setminus \{1\}} \mathfrak{g}_{\beta}$ où $\mathfrak{g}_{\beta} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in T, t.x = \beta(t)x\}$. Les éléments $\beta \in X(T) \setminus \{1\}$ tels que $\mathfrak{g}_{\beta} \neq \{0\}$ sont appelés les racines de \mathfrak{g} par rapport à T . On note leur ensemble $\Phi(T, G)$.	Si $\mathfrak{h} = \mathcal{L}(T)$ et $\alpha = d\beta$ alors $\mathfrak{g}_{\beta} = \mathfrak{g}_{\alpha}$. On obtient ainsi une bijection entre $\Phi(T, G)$ et $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$.	Un tore \mathfrak{h} agit de façon diagonale sur \mathfrak{g} (par ad) et on peut écrire $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{\alpha}$ où $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x\}$. Les éléments $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq \{0\}$ sont appelés les racines de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{h} . On note leur ensemble $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$.
Dans le cas G réductif et si T est un tore maximal, on a $C_G(T) = T$. De plus, la décomposition de \mathfrak{g} s'écrit $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi(T, G)} \mathfrak{g}_{\alpha}$ avec $\dim \mathfrak{g}_{\alpha} = 1$ ([Hu], 26.2).		
Dans le cas G réductif, pour tout $\alpha \in \Phi(T, G)$, il existe un unique sous-groupe T -stable U_{α} d'algèbre de Lie \mathfrak{g}_{α} ([Hu], 26.3).		
Les coracines : sous-groupes à un paramètre à valeur dans T		Éléments de \mathfrak{h}
Dans le cas semi-simple, le produit scalaire canonique sur $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est donné par le dual de $\langle \lambda, \lambda' \rangle = \det(Ad(\lambda)Ad(\lambda'))$		Dans le cas semi-simple, le produit scalaire utilisé sur \mathfrak{h}^* est donné par le dual de la forme de Killing sur $\mathfrak{h} : K(x, y) = tr(ad(x)ad(y))$.
Dans le cas G semi-simple, $\Phi(T, G)$ forme un système de racines dans $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.	Il sont isomorphes par $\beta \mapsto d\beta$.	Dans le cas \mathfrak{g} semi-simple, $\Phi(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ forme un système de racines dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.
Groupe de Weyl : $W = N_G(T)/C_G(T)$, agit sur les racines par $\sigma(\alpha)(t) = \alpha(n^{-1}tn)$ pour $n \in N_G(T)$ tel que $\sigma = \bar{n} \in W$ ([Hu], 24.1.B), c'est le groupe abstrait du système de racines ([Hu], 27.1).		Dans le cas semi-simple : groupe de Weyl abstrait du système de racines.
Chambres de Weyl : l'ensemble \mathcal{B}^T des sous-groupes de Borel contenant T . Cet ensemble est en bijection avec les chambres de Weyl des sous-groupes à un paramètre déterminées par les hyperplans orthogonaux aux racines ([Hu], 25.4).		Les chambres de Weyl abstraites du système de racines. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des bases du système de racines.
Si G est réductif, T un tore maximal, B un sous-groupe de Borel le contenant, $N = N_G(T)$ et S l'ensemble des σ_{α} de W tels que α soit une racine simple associée à B (où B est vue comme une chambre de Weyl du système de racines), alors (G, B, N, S) est un système de Tits ([Hu] 29.1).		
Si G est réductif, de rang semi-simple l , avec les notations précédentes, il existe 2^l sous-groupes paraboliques contenant B , ce sont les $BW_I B$ où I est une partie de S . Ils forment un système de représentants des classes de sous-groupes paraboliques.		Les sous-algèbres paraboliques contenant une sous-algèbre de Borel donné (et donc déterminant une base Δ du système de racines) sont décrites par les parties $I \subset \Delta$: Ce sont les algèbres engendrées par les espaces radiciels associés à $-I$ et Δ . Elles forment un système de représentants des orbites de paraboliques sous l'action de G ([TY], 29.4.7).
Un sous-groupe L d'un parabolique P est un facteur de Levi si $L \rtimes R_u(P)$ est une décomposition de P en produit semi direct. Tous les facteurs de Levi d'un parabolique donné sont conjugués ([Hu], 30.2)		Une sous-algèbre \mathfrak{l} est un facteur de Levi d'un parabolique \mathfrak{p} si il est réductif dans \mathfrak{g} et $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{nil}(\mathfrak{p})$. Tous les facteurs de Levi d'un parabolique donné sont conjugués ([TY], 29.5.7)

Références

- [Ba] V. Baranovski, *The variety of pairs of commuting nilpotent matrices is irreducible*, Transformation Groups, Vol.6, No.1, pp.3-8, (2001).
- [Ca] R.W. Carter, *Finite groups of Lie type, conjugacy and complex characters*, Wiley, Chichester and New York, (1985).
- [Co] D.H. Collingwood-W.M.McGovern, *Nilpotent orbits in semi-simple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold, (1992).
- [Di] J. Dixmier *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, (1974).
- [Gu] R.M. Guralnick, *A note on commuting pairs of matrices*, Linear and Multilinear algebra, Vol.31, pp.71-75, (1992).
- [Hu] J.E. Humphrey, *Linear algebraic groups*, Springer Verlag, (1975).
- [Kr] H. Kraft, *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie*, Aspekte Math. Vieweg, Braunschweig-Wissbaden, (1984).
- [Ph] M. Phulbert, *Je suis un noob et j'en suis fier*, Bulletin-bde Mathematical daily, éditions BBMN, (2006).
- [Pr] A. Premet, *Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras*, arXiv :math.RT/0302204v1, (2003).
- [Pr0] A. Premet, *Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras*, Inventiones mathematicae, Vol.154, pp.653-683 (2003).
- [Ri1] R.W. Richardson, *Conjugacy classes in Lie algebras and algebraic groups*, Ann. of Math, Vol 86, pp.1-15, (1967).
- [Ri2] R.W. Richardson, *Commuting varieties of semi-simple Lie algebras and algebraic groups*, Compositio Mathematica, Vol 38, Fasc.3, (1979).
- [TY] P. Tauvel-R.W.T. Yu, *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, (2005).

Remerciements

Je tenais à remercier Thierry Levasseur pour avoir accepté de diriger ma futur thèse dans le domaine, et pour avoir, pour l'instant, réussi à répondre à toutes mes questions. J'espère sincèrement que les trois prochaines années se dérouleront aussi bien. Un grand merci également à Philippe Caldéro, pour avoir accepté d'encadrer ce stage de DEA, et d'avoir pris le temps de réfléchir à ces problèmes qui ne sont pas exactement de son domaine de recherche. Je me dois aussi de remercier tout particulièrement Bertrand Remy, qui avait encadré mon stage de maîtrise, et qui a grandement contribué à me donner le goût de la recherche. Je remercie aussi les autres membres du jury qui ont accepté de prendre sur leur temps pour lire ce rapport et en écouter la soutenance. Et enfin puisqu'ils cherchent tous fiévreusement dans ces lignes si je ne les ai pas oublié, merci à tous mes amis, ils sont cools.