Michaël BULOIS

CV détaillé pour la candidature au poste de maître de conférences

Nationalité : Française
Date de Naissance : 08/10/1983 (27 ans)
Situation familiale : PACSé

Situation professionnelle actuelle : **A**ttaché **T**emporaire d'**E**nseignement et de **R**echerche à l'Université d'Angers.

Adresse personnelle : 77 rue de Versailles
91300 Massy

Téléphone portable : 06 33 12 04 91

adresse e-mail : mbulois@gmail.com
Page web : `http://math.univ-angers.fr/~bulois`

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mathématiques d'Angers (LAREMA).

Domaines de recherche : Théorie des représentations, géométrie algébrique.
Mots clés : algèbres de Lie semi-simples, algèbres de Lie symétriques, étude de variétés et schémas, GIT, schémas de Hilbert et variétés de carquois de Nakajima.
AMS Subject classification (2000) : 14L30, 17B20, 22E46

Sommaire :

CV :

Etudes supérieures, Diplômes et Concours :

- **Septembre 2006 - Novembre 2009** : Thèse de doctorat en tant qu'**A**llocataire **M**oniteur **N**ormalien.
  Titre : *Etude de quelques sous-variétés des algèbres de Lie symétriques semi-simples.*
  Directeur de thèse : Thierry Levasseur.
  Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mathématiques de Brest, UMR 6205. Ecole Doctorale : ED SICMA Université d'accueil : Université de Bretagne Occidentale. Mots clés : algèbres de Lie symétriques semi-simples, variétés algébriques, variétés commutantes, éléments nilpotents, nappes, tranche de Slodowy.
  Mention très honorable.
  Soutenue le 24 novembre 2009 devant le jury constitué de : Michel Brion (rapporteur), Johannes Huisman, Thierry Levasseur, Dmitri Panyushev (rapporteur) et Rupert W. T. Yu.
- **Septembre 2005 - avril 2006** : Master 2 de mathématiques à l'**E**cole **N**ormale **S**upérieure de Lyon (ENS Lyon). Mention Bien.
- **Septembre 2004 - juillet 2005** : Préparation et obtention du concours de l'agrégation de mathématiques. Rang : 41.
- **Septembre 2003 - juin 2004** : Maîtrise de mathématiques à l'ENS Lyon. Mention Bien.
- **Septembre 2002 - juin 2003** : Licence de mathématiques à l'ENS Lyon.
- **Septembre 2000 - août 2002** : Classe préparatoire aux grandes écoles au lycée Champollion à Grenoble. Admission à l'ENS Lyon. Rang : 55.

Condensé des expériences de recherche :

- **Septembre 2010 - août 2011 :** ATER à l'université d'Angers. Mots clés : schémas de Hilbert symétriques, variétés commutantes, variétés de carquois de Nakajima.
- **Septembre 2009 - août 2010** : Demi-ATER à l'université de Brest, Poursuite des thématiques de la thèse.
  Mots clés : lieu singulier de schémas algébriques, schema commutant, paires nilpotentes.
- **Septembre 2006 - novembre 2009** : Thèse (cf. ci-dessus).
- **Avril 2006 - août 2006** : 4 mois de stage de Master 2 sous la direction de Philippe CALDERO à l'université de Lyon. Titre : *Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente des algèbres de Lie semi-simples.*
  Mots clés : algèbres de Lie semi-simples, variétés algébriques, éléments nilpotents distingués.
- **Juin 2004 - août 2004** : 8 semaines de stage de Maîtrise sous la direction de Bertrand REMY à l'université de Grenoble. Titre : *Problème des sous-groupes de congruence.*
  Mots clés : groupes finis, SL_2, arithmétique, corps quadratiques.
- **Juin 2003 - juillet 2003** : 6 semaines de stage de Licence sous la direction de Abbas Chazad MOVAHEDDI à Limoges. Titre : *Théorie de Galois en dimension infinie.*
  Mots clés : corps, théorie de Galois, limites projectives, topologie p-adique.

Publications et prépublications :

Publications dans des revues internationales avec comité de lecture :

- M. Bulois, Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente des algèbres de Lie symétriques semi-simples, *Annales de l'institut Fourier*, **59** (2009), 37-80.
- M. Bulois, Sheets of symmetric Lie algebras and Slodowy slices, *Journal of Lie theory*, **51** (2011), 1-54.
- M. Bulois, Very nilpotent basis and n-tuples in Borel subalgebras, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **349** (2011), 149-152.

Les deux premiers articles font partie intégrante de ma thèse disponible à l'adresse `http://math.univ-angers.fr/~bulois/these_bulois.pdf`. Le troisième est une note qui répond à une question posée par J. Y. Charbonnel.

Prépublication :

- M. Bulois, Irregular locus of the commuting variety of reductive symmetric Lie algebras and rigid pairs, prépublication, arXiv :1009.0688, (2010), 28 pages, submitted.

Cet article a été écrit lors de mon année de demi-ATER. Il a été soumis dans *Transform. Groups* d'où il est revenu avec des corrections mineures. Il n'a pas encore été officellement accepté.

Acte de congrès :

- M. Bulois, Sheets of semisimple symmetric Lie algebras, In : Algebraic Groups, *Oberwolfach Reports* **7** (2010), 1101-1163, DOI : 10.4171/OWR/2010/19.

Notes courtes prépubliées :

- M. Bulois, The closure of a sheet is not always a union of sheets, arXiv : 1011.5045, 3 pages.
- M. Bulois, $\mathfrak{p}$-self-large elements of symmetric Lie algebras, traduction de l'appendice de l'article paru dans les Annales de l'Institut Fourier, 6 pages, `http://www.math.univ-angers.fr/~bulois/pdf/self_large_bulois.pdf`.

Ces notes répondent à de petites questions et ne sont pas destinées à être publiées seules.

Condensé des expériences d'enseignement :

- **Septembre 2010 - juin 2011** : ATER complet, 192 heures réparties entre des cours/TD en *Fondements d'analyse* (L1 MPCIE, mathématiques-physique-chimie-informatique-économie) et en *Algèbre linéaire* (L1 MPCIE), des travaux dirigés en *Algèbre linéaire* (L2 maths-info) et des *colles* (L1 MPCIE).
- **Septembre 2009 - juin 2010** : Demi-ATER, 96 heures de travaux dirigés réparties entre *Algèbre-géométrie* (L1 maths), *Algèbre linéaire* (L2 MASS, mathématiques appliqués aux sciences sociales) et *Réduction des endomorphismes* (L2 maths).
- **Septembre 2006 - juin 2009** : Monitorat, 198 heures de travaux dirigés ($\sim$3 années de 64 heures) réparties entre *Algèbre-analyse* (L1 maths) maths et *Réduction des endomorphismes* (L2 maths).

Recherche

Dans cette section se trouve le résumé des travaux que j'ai effectués jusqu'à maintenant. Je situe tout d'abord le contexte élémentaire qui mène aux questions que j'ai abordées durant ma thèse, puis je décris mes résultats à proprement parler. Dans une seconde partie, je décris mes travaux en cours. Je liste ensuite les présentations de mes travaux et les conférences que j'ai suivies. Enfin, je donne un résumé de mes stages de scolarité.

Résumé des travaux antérieurs :

Le contexte introduit ici se veut relativement accessible et élémentaire. Une lecture plus large des enjeux liés à mes objets d'étude et à leurs interactions peut être trouvée dans la partie Projet, page 13.

Contexte

Algèbres de Lie :

Les algèbres de Lie ont été introduites vers la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle afin d'étudier certains problèmes de nature géométrique. Dans un soucis de classification de ces objets, les **algèbres de Lie semi-simples** ont eu un rôle important. Je m'intéresse à cette classe d'algèbres de Lie. On dispose d'une classification explicite des algèbres de Lie semi-simples complexes (A_n ($\mathfrak{g} = \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, $[A,B] = AB - BA$), B_n ($\mathfrak{g} =$\{matrices antisymétriques de taille $2n+1$\}), C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2).

Dans le cas réel, la classification s'appuie fortement sur la classification complexe. Plus précisément, si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle, elle dispose d'une involution de Cartan θ. Notant $\mathfrak{g}_{0,\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{g}_{1,\mathbb{R}}$ les sous-espaces propres respectivement associés aux valeurs propres $+1$ et -1 de θ, on obtient une décomposition $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_{0,\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{g}_{1,\mathbb{R}}$ en parties respectivement appelées compactes et non compactes. En complexifiant ces objets, on obtient une paire $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \theta_{\mathbb{C}})$ associée à une décomposition $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{0,\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}$. L'espace $\mathfrak{g}_{0,\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tandis que $\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}$ est un $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_{0,\mathbb{C}}$-module où $\operatorname{ad}(x) = [x,\cdot]$ désigne l'*action adjointe*. Une paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$, où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe et $\mathfrak{g}_0$ l'espace fixé par une involution de $\mathfrak{g}$, est appelée **algèbre de Lie symétrique** (complexe) ou *paire symétrique*. La donnée d'une algèbre de Lie symétrique est équivalente à la donnée d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\mathfrak{g}$. La construction décrite ci-dessus établit une correspondance bijective entre les algèbres de Lie symétriques semi-simples complexes et les algèbres de Lie semi-simples réelles. Comme pour les algèbres de Lie, il existe une classification explicite des algèbres de Lie symétriques que l'on peut décomposer en 20 cas (AI, AII, AIII, BI, …, GI). Mentionnons enfin que la correspondance entre les algèbres de Lie symétriques complexes et les algèbres de Lie réelles est approfondie par la correspondance dite de Kostant-Sekiguchi. Cette dernière met en bijection l'ensemble des orbites nilpotentes réelles de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et l'ensemble des orbites nilpotentes complexes de $\mathfrak{g}_{1,\mathbb{C}}$.

Un cas particulier est celui où $\mathfrak{g}$ est isomorphe à la somme directe de deux copies $\mathfrak{k}^1$ et $\mathfrak{k}^2$ d'une même algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, et où $\theta(\mathfrak{k}^i) = \mathfrak{k}^{3-i}$, $i = 1,2$. Ce cas est dit *de type 0*. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0 = \{x + \theta(x) \mid x \in \mathfrak{k}^1\}$ est alors isomorphe à $\mathfrak{k}$ et le $\operatorname{ad}\mathfrak{g}_0$-module $\mathfrak{g}_1 = \{x - \theta(x) \mid x \in \mathfrak{k}^2\}$ est isomorphe au $\operatorname{ad}\mathfrak{k}$-module $\mathfrak{k}$. Dans ce sens, les algèbres de Lie symétriques constituent une **généralisation** des algèbres de Lie. Il se trouve que de nombreuses notions des algèbres de Lie (*e.g. sous-algèbres de Cartan, systèmes de racines, diagrammes de Dynkin, $\mathfrak{sl}_2$-triplets,…*) ont un analogue symétrique (*sous-espaces de Cartan, systèmes de racines restreints, diagrammes de Satake, $\mathfrak{sl}_2$-triplets normaux,…*).

Géométrie :

Un second niveau de structure des algèbre de Lie (semi-simples complexe) joue un rôle important. Il s'agit de considérer $\mathfrak{g}$ comme une G-variété où G est le *groupe algébrique adjoint* de $\mathfrak{g}$ opérant *via* l'*action adjointe* Ad sur $\mathfrak{g}$. Il s'avère alors utile d'étudier la situation dans le cadre de la **géométrie algébrique**. Ainsi, les notions d'élément *semi-simple* ou *nilpotent* de $\mathfrak{g}$ ont une interprétation géométrique. Les (G-)orbites semi-simples coïncident avec les orbites fermées, tandis que les orbites nilpotentes sont les orbites dont la fermeture contient 0. On peut définir le sous-groupe connexe $G_0 \subset G$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ et considérer $\mathfrak{g}_1$ comme une G_0-variété. Dans cette situation encore, de nombreuses notions ont été relevées au cadre des algèbres de Lie symétriques.

Les propriétés géométriques de certaines variétés issues des algèbres de Lie ont alors été étudiées. Un premier exemple est donné par la **variété commutante**

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}.$$

Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ (i.e. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), cette variété est simplement l'ensemble des couples de matrices qui commutent. Dans le cas général, R. W. Richardson a prouvé en 1979 que cette variété était *irréductible* [Ri]. De même, il a été récemment prouvé par A. Premet [Pr] que la **variété commutante nilpotente**

$$\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \cap (\mathcal{N} \times \mathcal{N}),$$

où $\mathcal{N}$ désigne l'ensemble des éléments nilpotents, est *équidimensionnelle.* Ses *composantes irréductibles* sont indexées par des orbites nilpotentes particulières, les *orbites distinguées* (*i.e.* dont les éléments e ont un commutant $\mathfrak{g}^e = \{x \in \mathfrak{g} \mid [e, x] = 0\}$ constitué uniquement d'éléments nilpotents).

Par ailleurs, de vieilles conjectures s'intéressent à l'idéal de définition de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$. Par exemple, il s'agit de savoir si le schéma commutant $\mathfrak{X}(\mathfrak{g})$, défini par les équations quadratiques $[x, y] = 0$ est un schéma réduit. Une autre conjecture annonce que la variété commutante devrait être normale. En 2007, V. Popov a obtenu des résultats sur le lieu irrégulier (ensemble des éléments de dimension d'orbite non maximale sous l'action de G) de la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ [Po]. Il a montré que $\mathfrak{X}(\mathfrak{g})$ est génériquement réduit et que le lieu des points singuliers de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ est de codimension au moins 2. Ceci constitue une des progressions les plus notables à ce jour sur les questions de normalité et de schéma réduit.

Les **nappes** (ou G-nappes) sont un autre exemple de variétés étudiées. Ce sont les composantes irréductibles des ensembles de la forme

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}; \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ces objets apparaissent dans plusieurs problèmes. Par exemple, un point crucial de la preuve d'irréductibilité de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ de [Ri] s'interprète naturellement en terme de nappes. Elles jouent également un rôle prépondérant dans la recherche de "bons" espaces quotients de $\mathfrak{g}$ sous l'action de G. Vers 1980, Borho et Kraft [BK, Bo] ont donné de très nombreux éléments de structure des nappes, en particulier les notions de (G-)*classe de Jordan* et *d'induction d'orbites* qui permettent de déterminer l'ensemble des orbites d'une nappe. Chaque nappe est une union finie de classes de Jordan et possède une unique classe de Jordan dense. Par ailleurs, Katsylo [Ka] a prouvé l'existence et donné une réalisation concrète d'un *quotient géométrique* des nappes. Ce quotient est réalisé à l'aide d'une *tranche de Slodowy* $e + X := (e + \mathfrak{g}^f) \cap S$ où (e, h, f) est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet et e est un élément de la nappe S. Enfin, en 2005, la *lissité* des nappes a été obtenue par Im Hof dans les cas classiques [IH].

Mes travaux

Mes travaux ont majoritairement traité de l'étude de certaines sous-variétés analogues dans les algèbres de Lie semisimples symétriques. Rappelons (cf. contexte ci-dessus) que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe semisimple, G son groupe adjoint et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation de $\mathfrak{g}$, faisant de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$ une algèbre de Lie symétrique. Le groupe G_0 est le sous-groupe connexe de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. L'action du groupe adjoint sur son algèbre de Lie peut être vue comme cas particulier de l'action d'un tel G_0 sur $\mathfrak{g}_1$.

La variété commutante nilpotente :

La première partie de mes recherches de thèse a consisté à décrire la *variété commutante nilpotente symétrique*

$$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1) := \{(x, y) \mid [x, y] = 0;\ x, y \in \mathfrak{g}_1 \text{ nilpotents}\}.$$

Dans un premier temps, j'ai pu généraliser certaines notions de la preuve d'équidimensionnalité de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g})$ de [Pr] pour les algèbres de Lie. En particulier, il s'est avéré que les notions d'éléments nilpotents $\mathfrak{g}_1$-*distingués* et *presque* $\mathfrak{g}_1$-*distingués* constituaient une bonne généralisation des éléments *distingués* et *presque distingués* utilisés par Premet. Un élément presque distingué de défaut d est un élément nilpotent e dont le centralisateur $\mathfrak{g}^e$ a une partie reductive qui est un tore T_d de dimension d. Un élément distingué est un élément presque distingué de défaut nul. J'ai pu montrer que les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1)$ sont nécessairement de la forme

$$\mathfrak{C}(e) := \overline{G_0.(e, \mathcal{N} \cap \mathfrak{g}_1^e)}$$

pour e presque $\mathfrak{g}_1$-distingué de défaut d, une telle variété étant de dimension $\dim \mathfrak{g}_1 - d$.

Dans un second temps, j'ai pu établir une énumération explicite des éléments presque $\mathfrak{g}_1$-distingués au cas par cas. Les méthodes menant à cette énumération reposent sur l'étude de la représentation usuelle de $\mathfrak{g}$ lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie classique. Le recours à des tables de classifications d'éléments nilpotents a été nécessaire pour traiter les cas exceptionnels. Enfin, combiné à quelques autres méthodes géométriques, ceci a permis d'aboutir dans un certain nombre de cas (15 sur 20) à une vérification de la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1)$ sont les $\mathfrak{C}(e)$ pour e élément $\mathfrak{g}_1$-distingué. En particulier, $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1)$ est équidimensionnelle.*

Ce travail a donné lieu à l'article [Bu1].

Les nappes :

La seconde partie de ma thèse a porté sur l'étude des G_0-*nappes*, qui sont les composantes irréductibles des ensembles de la forme

$$\mathfrak{g}_1^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \dim G_0.x = m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Il se trouve que les méthodes utilisées pour décrire la structure des nappes des algèbres de Lie, notamment l'induction d'orbites, ne se généralisent pas de façon simple aux G_0-nappes. On dispose cependant de l'inclusion $\mathfrak{g}_1^{(m)} \subset \mathfrak{g}^{(2m)}$. Ceci a motivé l'étude de l'intersection d'une G-nappes S avec $\mathfrak{g}_1$ afin d'obtenir des informations sur les G_0-nappes.

De façon analogue au cas des algèbres de Lie, on dispose d'une notion de G_0-classe de Jordan qui est étroitement liée à la notion de nappes. Dans un premier temps, j'ai étudié les propriétés de ces classes. L'intersection d'une G-classe de Jordan avec $\mathfrak{g}_1$ s'est avérée être une variété équidimensionnelle dont les composantes irréductibles sont des G_0-classes de Jordan. Ce resultat a permis de montrer que les G_0-nappes sont des unions de G_0-classes de Jordan dans les cas classiques.

Ensuite, l'étude de liens géométriques entre une G-nappe S et sa tranche de Slodowy a permis de paramétrer $S \cap \mathfrak{g}_1$ sous certaines conditions. Ces conditions ont été vérifiées dans les cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ (cas AI, AII, AIII). Ceci a notamment mené à une preuve de l'*équidimensionnalité* de $S \cap \mathfrak{p}$ et à une description explicite des G_0-nappes, toujours dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

Théorème 2. *Supposons que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ soit muni d'une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation quelconque.*
Soit $S \subset \mathfrak{g}_1$ une G_0-nappe et soit e un élément nilpotent de S_K inclus dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet normal (e, h, f). Soit Y la tranche de Slodowy de S définie par $e + Y := S \cap (e + \mathfrak{g}_1^f)$. Alors $S = \overline{K.(e+Y)}^{reg}$.

De plus, la *lissité* des G_0-nappes a été obtenue dans les cas classiques. Ce travail fait l'objet de l'article [Bu2]. Quelques applications sont envisagées, en particulier une meilleure description de la variété commutante symétrique $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1) := \mathfrak{C}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1)$ dans le cas AIII.

La variété commutante :

En 1994, D. Panyushev [Pa] a montré que $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ n'est pas toujours irréductible, contrairement au cas des algèbres de Lie. Depuis, plusieurs travaux de Panyushev, Yakimova, Sabourin et Yu ont cherché à distinguer les cas où $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ est irréductible des cas où elle est réductible, 3 cas (sur 20) restant indéterminés.

Lors de mon demi-ATER, j'ai pu adapter les méthodes de V. Popov [Po] dans le cas symétrique afin d'obtenir des résultats similaires sur le lieu irrégulier de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$. Ce travail a en outre permis de prouver la réductibilité de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ dans les trois derniers cas. La démonstration s'appuie sur la découverte d'une nouvelle classe, spécifique aux algèbres de Lie symétriques, de paires d'éléments commutant : *les paires rigides*. L'existence de paires rigides non-triviales a aussi permis d'apporter une preuve de la réductibilité de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ dans tous les autres cas connus, fournissant ainsi une démonstration uniforme. Par ailleurs, d'autres liens plus profonds entre les paires rigides et les composantes irréductibles de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ ont pu être mis en lumière :

Théorème 3. *Les composantes irréductibles génériquements réduites de* $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ *sont en bijection avec les orbites de paires rigides des* $\mathfrak{g}_1$*-algèbres de Levi de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0)$.

De plus, l'omniprésence des paires rigides dans les questions de réductibilité de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ mène à la conjecture suivante :

Conjecture 4. *Toutes les composantes irréductibles de* $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ *sont génériquement réduites.*

Ce travail a donné lieu à la prépublication [Bu3]

Bases très nilpotentes

Le groupe G agit diagonalement sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ via $g.(x, y) = (g.x, g.y)$. Dans ce cadre, une question naturelle en théorie géométrique des invariants (GIT) est d'étudier l'idéal des fonctions invariantes $S(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^G$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 5. *Le lieu des zeros de* $S(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^G_+$ *est* $G.(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n})$ *où* $\mathfrak{n}$ *est le radical nilpotent d'une sous-algèbre de Borel.*

De plus, on peut extraire de $S(\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*)^G_+$ un nombre fini de polynômes dont le lieu des zéros est $G.(\mathfrak{n} \times \mathfrak{n})$. Le coeur de la démonstration réside dans la proposition suivante qui est une généralisation du théorème d'Engel.

Proposition 6. *Si* $y_1, \ldots, y_n$ *sont des élements nilpotents de* $\mathfrak{g}$ *dont tous les crochets itérés sont nilpotents, alors ils engendrent une algèbre de Lie nilpotente.*

La plausibilité de la proposition 6 ainsi que son application à la preuve de la proposition 5 m'ont été sugérées par J. Y. Charbonnel,.

Ceci fait l'objet de la note [Bu4].

Travaux en cours

Variété commutante et schéma de Hilbert (avec Laurent Evain)

Le **schéma de Hilbert** ponctuel $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ est un schéma paramétrant les sous-schémas de longueur n du plan affine $\mathbb{A}^2$. Il se trouve que $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ est un quotient d'un ouvert de la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{gl}_n)$ sous l'action de GL_N et l'étude des ces deux objets bénéficie de cette correspondance. C'est au travers de celle-ci qu'ont été montré l'irréductibilité de la variété commutante nilpotente $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{s}l_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{C}(\mathfrak{s}l_n) \cap (\mathcal{N}(\mathfrak{s}l_n) \times \mathcal{N}(\mathfrak{s}l_n))$ [Ba], et celle du schéma de Hilbert concentré en un point en petite caractéristique [Pr]. Mentionnons aussi que l'étude de $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ a été considérablement relancée à la fin des années 1990 par la découverte d'une connexion entre son algèbre homologique et des représentations d'algèbres de Heisenberg. En particulier, des opérateurs de création et de destruction, rappelant ceux apparaissant en physique théorique, ont pu être construits sur l'algèbre homologique de $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ [Na, §8].

Le schéma de Hilbert possède des analogues $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-gradués, récemment étudiés par P. E. Chaput et L. Evain. Avec Laurent Evain (Université d'Angers), nous étudions la connexion entre ces schémas de Hilberts gradués et des variétés commutantes d'algèbres de Lie $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-graduées (le cas des algèbres de Lie symétrique correspondant au cas $m = 2$). Si le lien s'établit relativement naturellement, quelques composantes irréductibles disparaissent dans le passage de la variété commutante vers ce schéma quotient. Dans le langage de la théorie géométrique des invariants (**GIT**) de Mumford, ceci est dû au manque d'éléments semi-stables. Il existe des méthodes classiques afin de faire apparaître plus d'éléments semi-stables. Ceci peut se faire à travers de changements de linéarisation ou en passant au cadre plus général des variétés de carquois de Nakajima (cf. [Gi]). C'est ce sur quoi nous travaillons actuellement.

Nappes de GI (avec Pascal Hivert)

Une partie de la thèse de P. Hivert [Hi] est consacrée à l'étude des nappes de l'algèbre de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ de type G_2. Il en donne de nouvelles descriptions explicites à travers la représentation, désormais commune, de $\mathfrak{g}$ sur l'espace des octonions purs $\mathfrak{g} \to \mathfrak{so}_7$.

Avec Pascal Hivert (Université de Versailles), nous étudions les nappes de la seule algèbre de Lie symétrique non-triviale de type G_2 (type GI). Les G-nappes en type G_2 ont un intérêt particulier car on y trouve le seul exemple connu de nappe singulière. Nous espérons étudier le comportement des singularités sous l'intersection avec $\mathfrak{g}_1$ et nous nous intéressons en particulier au rôle de la tranche de Slodowy. Ceci se fait dans la perspective d'une généralisation possible des résultats de [Bu2] à d'autres algèbres de Lie symétriques.

Nappes d'algèbres de Lie symétriques sur $\mathbb{R}$ et trous noirs (avec Clément Ruef)

En physique théorique et plus particulièrement en **théorie des champs** , de nombreuses questions se transposent en terme d'algèbres de Lie. Ainsi, certaines équations physiques, dont les solutions paramètrent des familles de trous noirs, peuvent se traduire en équations polynomiales sur la représentation adjointe de certaines algèbres de Lie symétriques réelles (cf. *e.g.* [KHPV, BNS]).

Avec Clément Ruef (Institut Max Plank, Postdam), nous étudions ces équations et essayons d'exprimer leurs solutions de façon unifiée. Dans le cas de type GI, nous obtenons la fermeture d'une nappe sous-régulière et il semble probable que l'induction d'orbite joue un rôle important dans les autres cas. Dans ce cadre des algèbres de Lie symétriques réelles, quelques fondations théoriques manquent encore et il serait important de les développer.

Références

[Ba] V. Baranovski, The variety of pairs of commuting nilpotent matrices is irreducible, *Transform. Groups* **6** (2001), 3-8.

[BK] W. Bohro and H. Kraft, Über Bahnen und deren Deformationen bei linear Aktionen reducktiver Gruppen, *Math. Helvetici.* **54** (1979), 61-104.

[BNS] G. Bossard, H. Nicolai and K. S. Stelle, Universal BPS structure of stationary supergravity solutions, JHEP **0907** (2009) 003. [arXiv :0902.4438 [hep-th]].

[Bo] W. Bohro, Über schichten halbeinfacher Lie-algebren, *Invent. Math.* **65** (1981), 283-317.

[Bu1] M. Bulois, Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente d'une algèbre de Lie symétrique semi-simple, *Annales de l'institut Fourier* **59** (2009), p. 37-80

[Bu2] M. Bulois, Sheets of Symmetric Lie Algebras and Slodowy Slices, *Journal of Lie Theory* **21** (2011), 1–54.

[Bu3] M. Bulois, Irregular locus of the commuting variety of reductive symmetric Lie algebras and rigid pairs, *preprint*, arXiv : 1009.0688 (2010).

[Bu4] M. Bulois, Very nilpotent basis and n-tuples in Borel subalgebras, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **349** (2011), 149-152.

[Gi] V. Ginzburg, Lectures on Nakajima's quiver varieties, *Lectures given at a Summer School "Geometric methods in Representation Theory"*, arXiv :0905.0686 (2008).

[Hi] P. Hivert, Nappes sous-régulières et équations de certaines compactifications magnifiques, unpublished thesis, `http://www.math.uvsq.fr/~hivert/these` (2010).

[IH] A. E. Im Hof, The sheets of classical Lie algebra, unpublished thesis, `http://pages.unibas.ch/diss/2005/DissB_7184.pdf` (2005).

[Ka] P. I. Katsylo, Sections of sheets in a reductive algebraic Lie algebra, *Math. USSR Izvestiya* **20** (1983), 449-458.

[KHPV] S. Kim, J. L. Hörnlund, J. Palmkvist and A. Virmani, Extremal solutions of the S3 model and nilpotent orbits of G2(2), *Journal of High Energy Physics* **8** (2010), 1-43, arXiv : 1004.5242.

[Na] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lecture Ser **18**, 1999.

[Pa] D. I. Panyushev, The Jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties, *Compositio Math.* **94** (1994), 181-199.

[Po] V. L. Popov, Irregular and singular loci of commuting varieties, *Transform. Groups* **13** (2008), 819-837.

[Pr] A. Premet, Nilpotent commuting varieties of reductive Lie algebras, *Invent. Math.* **154** (2003), 653-683.

[Ri] R. W. Richardson, Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups, *Compositio Math.* **38** (1979), 311-327.

Présentations

En plus de ma soutenance de thèse, j'ai été amené à présenter mes différents résultats lors de plusieurs colloques et séminaires de laboratoires. Les thématiques des séminaires pouvaient être très proche de mon sujet (ex : Groupes Algébriques à Poitiers) ou plus généralistes (ex : Algèbre-Géométrie à Grenoble). Ceci m'a permis de diversifier mon discours suivant mes interlocuteurs. Ci-dessous, se trouve la liste des présentations de mes travaux de recherche classées par sujet.

- **7** présentations de travaux sur les actions doublées et les variétés commutantes des algèbres de Lie symétriques : aux deux séminaires de géométrie et systèmes dynamiques et de géométrie algébrique d'Angers (2010), au séminaire d'algèbre et géometrie de Metz (2010), au séminaire "algèbres enveloppantes" de Paris VII (2011), au séminaire d'algèbre de Versailles (2011), au séminaire de groupes algébriques de Poitiers (2011) et au séminaire d'algèbre de Lyon (2011).

- **2** présentations des travaux de thèse lors de la soutenance de thèse (Brest, 2009) et au séminaire "algèbres enveloppantes" de Paris VII (2010).

- **4** présentations de travaux sur les nappes des algèbres de Lie symétriques : au séminaire d'algèbre et géométrie de Brest (2009), au séminaire de groupes algébriques de Poitiers (2009), à l'occasion du colloque tournant du GDR "Géométrie, Dynamique et Représentations des Groupes" 3066 à l'institut Camille Jordan (Lyon, 2010) et au colloque "Algebraic groups" à Oberwolfach (Allemagne, 2010).

- **4** présentations de travaux sur la variété commutante nilpotente des algèbres de Lie symétriques : au séminaire de groupes algébriques de Poitiers (2008), au séminaire d'algèbre et géométrie de Brest (2008), au séminaire d'algèbre de Lyon (2009), et au séminaire d'algèbre et géométries de Grenoble (2009).

Par ailleurs, le laboratoire de Brest s'est doté récemment (2006) d'un séminaire pour les thésards en mathématiques. Il s'agit de présenter certaines notions et leurs enjeux tout en restant accessible à la majorité des thésards du laboratoire. Le cadre est très informel et les questions nombreuses. J'ai présenté cinq exposés à l'occasion de ce séminaire entre mars 2007 et mars 2010. Ces cinq exposés portaient sur 1) *la notion d'irréductibilité en géométrie algébrique*, 2) *les représentations de* $\mathfrak{sl}_2$ 3) *les notions de résolubilité et semi-simplicité pour les algèbres de Lie*, 4) *la notion de catégorie* et 5) *les théorèmes de Gödel et la théorie des modèles*. J'ai également donné un séminaire sur 6) *les representations de carquois* au séminaire des thésards d'Angers en octobre 2010.

Enfin, en mai 2008, j'ai eu à présenter mon sujet de thèse à un niveau *lycéen* lors d'un stage CIES à Rennes. Cela s'est fait au travers d'un poster et d'un exposé oral de six minutes.

Conférences suivies/ Ecoles d'été et autres formations

Je donne ci-dessous la liste des conférences et des écoles d'été auxquelles j'ai assisté, ainsi que deux groupes de lecture.

- **Colloques** : Colloque tournant Théorie des représentations dans le cadre des GDR 3066 et 2432 (Reims, 2008, 3 jours), Representation days à l'ETH Zürich (2008, 3 jours), Colloque tournant Géométrie, dynamique et représentations des groupes de l'institut Camille Jordan dans le cadre du GDR 3066 (Lyon, 2010, 3 jours), Algebraic groups à Oberwolfach (Allemagne, 2010, 1 semaine), Journées d'algèbre à Dijon (2010, 3 jours). Symmetric spaces and their generalizations à Levico Terme (Italie, 2010, 1 semaine), Colloque tournant Théorie des représentations dans le cadre du GDR 3066 (Poitiers, 2011, 3 jours)

- **Ecoles d'été** : Algèbres de Cherednick (CIRM, 2007, 1 semaine), Théorie des représentations de GL_2 (CIRM, 2008, 1 semaine), Représentations de carquois (Grenoble, 2008, 1 semaine), Geometry of representations à Cologne (Allemagne, 2009, 1 semaine).

- **Groupe de lecture** : sur les Variétés hyperboliques complexes à Brest en 2006-2007 (6 séances), sur la Classification des singularités terminales en dimension 3 (Angers, 2010, 3 séances).

Autres expériences de recherche

Avant ma thèse, j'ai effectué trois stages de recherche dans trois laboratoires différents (Limoges, Grenoble et Lyon) sur des thématiques variées. Les rapports de ces stages sont disponibles à l'adresse `http://math.univ-angers.fr/~bulois`.

Mon **stage de Licence** a consisté principalement en une étude bibliographique dans le but de comprendre la théorie de Galois en dimension infinie. La théorie de Galois *classique* ayant été étudiée en cours pendant l'année, il a fallu mettre en évidence les concepts faisant fonctionner la théorie en dimension infinie. Ce sujet présentait l'avantage de faire ressortir l'importance des liens entre topologie et algèbre. En particulier, il a été interessant de comprendre l'intérêt de méthodes non-discrètes en algèbre. J'ai pu aborder les notions de groupes profinis ou de toplogie p-adique qui sont à la frontière entre toplogie et algèbre. Ce stage a été effectué son la direction de Abbas Chazad MOVAHEDDI à Limoges

En **Maîtrise**, l'objectif de mon stage était de lire attentivement un chapitre de livre pré-publié de B. Sury et de proposer des corrections aux quelques erreurs trouvées. Le chapitre portait sur des sous-groupes d'indice fini de $SL_2(A)$ où A est soit $\mathbb{Z}$ soit l'anneau des entiers d'un corps de nombre quadratique. Plus particulièrement, il s'agissait de savoir si tous les sous-groupes normaux d'indice fini étaient d'un certain type ou non. Ce sujet était à l'interface entre toplogie algébrique (qui permet de transformer certaines questions algèbriques en problème géométrique), théorie des groupes (normalité de sous-groupes, p-sylows, ...) et géométrie hyperbolique. Il m'a permis d'aborder de nombreux domaines tout en me focalisant sur un problème plus pointu. Ce stage s'est fait sous la direction de Bertrand Remy à Grenoble.

L'objectif de mon **stage de Master2** était de comprendre deux articles évoqués plus haut. Il s'agit de l'article de Richardson sur l'irréductibilité de la variété commutante et de l'article de Premet sur l'équidimensionnalité de la variété commutante nilpotente. Il m'a initié à une part importante de la théorie de Lie et à l'étude élémentaire des variétés algébriques. Si le but n'était pas de trouver des résultats nouveaux, j'ai pu trouver des raccourcis à certaines démonstrations. Ce stage s'est avéré être un très bon prélude à mon sujet de thèse. Il s'est déroulé sous la direction de Philippe Caldero à l'université de Lyon.

Enseignement

Enseignement à l'université :

Je suis titulaire de l'agrégation de mathématiques. J'ai donné environ 500 heures d'enseignement (en équivalent TD) destinés à des étudiants de Licence 1 ou Licence 2 à l'université. J'ai enseigné ces heures dans le cadre d'un monitorat de trois ans et d'un demi-poste d'ATER effectués à l'université de Brest et d'un ATER complet effectué à l'université d'Angers. Il s'agissait de séances de TD ou de cours/TD. Les effectifs des classes variaient de 10 à 30 étudiants.

Pour chaque séance de TD donnée à Brest, j'ai rédigé une feuille d'exercice . Les étudiants travaillaient seuls ou à plusieurs. Je vérifiais leurs réponses, répondais à leurs questions et donnais des pistes de réflexion à ceux d'entre eux qui étaient bloqués.

Concernant les cours/TD donnés à Angers, les enseignements étaient fortement mutualisés (4 à 6 groupes pour autant d'intervenants). J'ai participé à la préparation du contenu de certains cours, la création de quelques feuilles d'exercices et de quelques devoirs. J'ai aussi corrigé les copies de mes étudiants.

- ***Algèbre-Analyse*** (TD, 2006-2008) destiné à des étudiants de L1 mathématiques (2 années de 36 heures chacune)
  Le but principal du TD était d'aider les étudiants à se familiariser avec les nombreuses notions élémentaires découvertes dans le cours. Ces notions incluaient la logique ; les ensembles ; les relations d'ordre ou d'équivalence ; les groupes, anneaux et corps ; les équations complexes du second degré ; le principe de récurrence ; les polynomes ; l'arithmetique de $\mathbb{N}$ et de $\Bbbk[X]$; les suites et les séries.

- ***Algèbre-Géométrie*** (TD, 2008-2010) destiné à des étudiants de L1 mathématiques (2 années de 36 heures chacune)
  Les contenus et buts étaient principalement les mêmes que pour le TD d'Algèbre-Analyse (qu'il a supplanté), les suites et séries ayant été remplacées par de la géométrie du plan utilisant les nombres complexes.

- ***Réduction des endomorphismes*** (TD, 2006-2010) destiné à des étudiants de L2 mathématiques (4 années de 30 heures chacune)
  Les pré-requis du cours consistaient en un cours d'algèbre linéaire de L1. Ainsi, les étudiants devaient déjà être familiarisés avec les notions d'espace vectoriel, d'application linéaire et de matrices. Le but du cours était d'amener les étudiants à savoir diagonaliser, trigonaliser ou mettre sous forme normale de Jordan des endomorphismes. Les notions nouvelles étaient principalement celles de vecteur propre, valeur propre, sous-espace propre, polynômes d'endomorphisme et sous-espace caractéristique. Une grande partie du travail a été de les aider à créer des liens entre certains aspects théoriques du cours et les calculs, parfois complexes, qui surgissaient naturellement en TD.

- ***Algèbre Linéaire*** (TD, 2009-2010) destiné à des étudiants de L2 mathématiques appliquées aux sciences sociales (L2 MASS) (1 année de 30 heures)
  Le programme était principalement le même que celui du cours précédent, avec un contenu plus informel, des résultats moins avancés et plus d'applications. Ainsi, de la modélisation a pu être abordée tandis que la forme normale de Jordan n'a pas été évoquée.

- ***Algèbre Linéaire*** (TD, 2010-2011) destiné à des étudiants de L2 mathématiques-informatique. (1 année de 40 heures)
  Il s'agissait principalement du programme du cours précédent.

- ***Algèbre Linéaire*** (Cours/TD, 2010-2011) destiné à des étudiants de L1 mathématiques-informatique. (1 année de 54 heures)
  Sans prérequis algébriques, il s'agissait de développer la méthode du pivot de Gauss, les notions de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, de déterminant, d'applications linéaires et de matrices. Comme ceci était un premier cours d'algèbre, les exemples étaient variés afin de justifier l'abstraction.

- ***Fondements de mathématiques*** (Cours/TD, 2010-2011) destiné à des étudiants de L1 mathématiques-chimie. (1 année de 54 heures)

Il s'agissait d'un cours d'analyse standard du second semestre où sont traitées les suites rélles (convergence, suites monotones, adjacentes, extraites et de Cauchy), les fonctions rélles (limite, continuité, dérivabilité, comparaisons, équivalences, développements limités, fonctions convexes) et les équations différentielles linéaires du 1er et second ordre.

- ***Colles*** (2010-2011) destiné à des étudiants de L1 MPCIE (mathématiques, physique, chimie, informatique et économie). (24 colles de 1 heure)
  Calquées sur le modèle des classes préparatoires, l'objectif relevait plus de l'accompagnement individualisé des élèves que de leur évaluation. Le programme était celui d'un cours classique d'analyse du premier semestre.

Tableau récapitulatif des enseignements :

Années	Module	Filière	Effectifs	Heures/année	Nb d'heures total (équiv TD)
2006-2008	Algèbre-Analyse,TD	L1 Maths	∼30	36	72
2008-2010	Algèbre-Géométrie, TD	L1 Maths	∼30	36	72
2006-2010	Réduction des endomorphsimes, TD	L2 Maths	∼20	30	120
2009-2010	Algèbre linéaire, TD	L2 MASS	∼10	30	30
2010-2011	Colles	L1 MPCIE	3	24	24
2010-2011	Algèbre linéaire, TD	L2 Math-Info	∼20	40	40
2010-2011	Algèbre linéaire, Cours-TD	L1 Math-Info	∼25	54	67,5
2010-2011	Fondements de mathématiques, Cours-TD	L1 Math-Chimie	∼30	54	67,5
					493

Animations diverses :

En parallèle de ma thèse, j'ai participé à quelques acivités de vulgarisation scientifique.

Encadrement d'un stage d'initiation à la Recherche :
En 2009, pendant trois jours, j'ai encadré sept lycéens lors d'un projet ***hippocampe***. En premier lieu, j'ai préparé un cadre ludique et des pistes de réflexion possibles autour du concept de *base en arithmétique*. Le but des lycéens était d'explorer en groupe quelques-unes de ces pistes, rédiger sur un poster leurs résultats et les présenter durant une après-midi à des personnes conviées dans la salle des posters (principalement des membres du laboratoire de mathématiques et les lycéens des autres projets hippocampe). Au final, ils ont été capable de formaliser précisément une écriture en base 12. Ils ont décrit de façon explicite les méthodes de calcul à mettre en œuvre pour effectuer l'addition et la multiplication. Enfin, ils ont pu décrire les nombres rationnels ayant une écriture finie en base 12.

Fête de la science :
En plus de ma participation au stand de mathématiques de la fête de la science à Brest, j'ai créé une nouvelle activité. Cette activité avait pour thématique les coniques, et plus particulièrement les ellipses. Le matériel était constitué d'une part de plusieurs cônes tronqués en ellipse, parabole et hyperbole, et d'autre part d'un support clouté muni d'une ficelle permettant de dessiner une ellipse à l'aide de ses deux foyers. L'expérience permettait de montrer que les deux façons de construire les ellipses coïncident.

Projets

Perspectives / Projet de recherche

Contexte

Mes travaux antérieurs s'inscrivent dans le cadre général de l'étude de l'**action diagonale** (ou *action doublée*) d'un groupe algébrique adjoint semisimple complexe G sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie. Plus généralement, on pose $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, une algèbre de Lie $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-graduée ($[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$) et G_0, le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On s'intéresse alors à l'étude de l'action de G_0 sur $\mathfrak{g}_1$ et de l'action diagonale de G_0 sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$.

Dans ce contexte, il existe de nombreux problèmes ouverts. Citons la recherche de “bons” **espaces quotients**. Il s'agit de prouver l'existence, voire de construire, des quotients catégoriques ou géométriques de certains sous-espaces de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ sous l'action de G_0. Ainsi, les nappes -composantes irréductibles de l'ensemble des éléments d'une dimension d'orbite donnée- sont des candidats naturels à avoir un quotient géométrique. La construction d'un quotient géométrique des nappes a été donnée pour les algèbres de Lie ($m = 1$) [Ka] et la question de son existence est ouverte en général.

Lorsque $m = 1, 2$, la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ est la fibre en 0 de l'application $\phi = [.,.] : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ (si $m = 1$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$) et la compréhension de sa géométrie apparaît comme importante dans la description de l'action doublée. Une question ouverte depuis plusieurs dizaines d'années est de savoir si l'idéal de définition de cette variété est engendré par les équations quadratiques évidentes $[x, y] = 0$. Autrement dit, il s'agit de savoir si le schéma commutant est un **schéma réduit**. Des études récentes ont montré que c'est génériquement le cas (i.e. localement autour de points appartenant à un certain ouvert dense de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$).

Mentionnons aussi un thème objet de plusieurs publications depuis une dizaine d'années : la recherche de bons analogues doublés au **cône des éléments nilpotents** $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$. Il s'agit de trouver des sous-variétés de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ayant des propriétes analogues à celles de $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$. Parmi les propositions récentes de tels ensembles, citons les paires nilpotentes (principales) de [Gi] qui ont des propriétés de type Jacobson-Morozov impliquant des $\mathfrak{sl}_2$-triplets. Ginzburg a aussi prouvé que ces paires sont en nombre fini. Un autre exemple est donnée par le bicône nilpotent $\{(x, y) \mid \alpha x + \beta y \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$, étudié dans [CM], qui est une intersection complète définie par des polynômes analogues à ceux de $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$.

Interactions

Les cadres mentionnés dans la partie “contexte” incluent l'étude de la géométrie des représentations de plusieurs **carquois**, les $\tilde{A}_{m-1}$ et leur version doublée (le nombre de flèches entre deux sommets est doublé). Ces carquois apparaissent lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ et les versions doublées sont des carquois *sauvages*. Ainsi, mon article sur les nappes inclue l'étude de la géométrie de l'ensemble des nappes de l'espace des représentations de $\tilde{A}_1$. Les articles sur la variété commutante donnent des informations sur un sous-ensemble de l'espace des représentations de la version doublée de $\tilde{A}_1$.

Le **schéma de Hilbert** ponctuel $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ est un quotient d'un ouvert de la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{gl}_n)$ sous l'action de GL_N. Un descriptif des liens entre schémas de Hilbert et variété commutante a déjà été donné dans la section *Travaux en cours* page 7.

L'application $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, mentionnée dans la partie contexte ci-dessus, peut être vue comme une **application moment**. L'étude de ses fibres a donc un intérêt particulier en géométrie symplectique et en théorie géométrique des invariants. Il en va de même pour $\phi : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ dans les algèbres de Lie symétriques.

Par ailleurs, l'étude de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1)$ joue un rôle dans l'analyse des **distributions invariantes**. Plus particulièrement, cette variété intervient dans des questions de théorie des représentations telles que la propriété de Gelfand pour les paires symétriques [Sa, §3].

Enfin, en **théorie des champs** (physique théorique), de nombreuses questions se transposent en terme d'algèbres de Lie. Quelques informations sur un exemple de ces interactions se trouvent dans la section *Travaux en cours* page 7.

Le Projet

Je propose comme projet de recherche de développer des outils permettant l'étude à plusieurs niveaux des actions doublées mentionnées plus haut, en particulier dans le cadre des algèbres de Lie symétriques ($m = 2$).

Tout d'abord, une **continuation** directe de mes travaux antérieurs est possible. Il est naturel de se demander dans quelle mesure les résultats que j'ai obtenus sur les variétés commutantes et les nappes restent valides pour toutes les algèbres de Lie symétriques. Ceci devrait nécessiter des techniques plus avancées que celles existantes. Certains resultats tels que la paramétrisation des G_0-nappes ou la preuve de l'équidimensonnalité de la variété commutante nilpotente semblent cependant accessibles pour d'autres algèbres de Lie symétriques.

Par ailleurs, il serait également intéressant de chercher à améliorer les connaissances sur **d'autres aspects** de ces variétés dans le cadre symétrique. Par exemple, on peut espérer prouver que les G_0-nappes ont des quotients géométriques sous l'action de G_0 (au moins dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$). On peut également s'intéresser à l'idéal de définition du schéma commutant nilpotent : essayer de savoir si ce dernier est réduit ou essayer de relier cette question à son analogue (ouverte) sur le schéma commutant. Aussi, le schéma de Hilbert possède un analogue $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-gradué, récemment étudié (Chaput et Evain, 2010), qui devrait apporter un éclairage nouveau sur les variétés commutantes dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

On peut également chercher les propriétés **d'autres variétés**. Ainsi, le bicône nilpotent a un analogue naturel dans le cas symétrique. Les méthodes de A. Moreau ne se transcrivent pas aisément dans le cadre symétrique. On devrait donc essayer de développer d'autres techniques adaptées à cette variété afin de vérifier la validité de propriétés analogues.

Il est aussi impératif de regarder ces problèmes à **plusieurs échelles**. Une bonne compréhension des actions doublées devrait tirer profit de l'analyse de la situation tant dans des cas particuliers (e.g. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$) que dans des cadres très généraux (e.g. m quelconque, action triplée, ...). Cela permet de distinguer les caractéristiques partagées par toutes les actions doublées, des particularités de $\mathfrak{gl}_n$ et du cas des algèbres de Lie ($m = 1$). L'étude de la variété commutante est particulièrement révélateur de ces différences. Elle est irréductible lorsque $m = 1$ et réductible dans certains cas où $m = 2$. Ceci est lié à l'existence de certaines paires particulières qu'on ne trouve que dans quelques algèbres de Lie symétriques, les paires rigides (cf. Mes travaux, page 5).

Comme expliqué précédemment, il existe de nombreuses **interactions** entre les questions proposées dans ce projet et d'autres domaines mathématiques. Ceci rend l'étude de ces questions d'autant plus intéressante, outre leur côté naturel. J'ai eu l'occasion de rencontrer différents chercheurs spécialistes des domaines précités. Je propose également comme projet de développer, ou poursuivre, certaines de ces interactions en collaboration avec ces chercheurs.

Enfin, je dispose d'idées de départ pour plusieurs des problèmes évoqués ici et je les pense, dans l'ensemble, relativement accessibles. Certaines de ces idées ont d'ors et dejà donné des résultats partiels.

Références

[CM] J. Y. Charbonnel and A. Moreau, Nilpotent bicone and characteristic submodule in a reductive Lie algebra, *Transform. Groups* **14** (2009), 319-360.

[Gi] V. Ginzburg, Principal nilpotent pairs in a semisimple Lie algebra I., *Invent. Math.* **140** (2000), 511-561.

[Ka] P. I. Katsylo, *Sections of sheets in a reductive algebraic Lie algebra*, Math. USSR Izvestiya **20** (1983), 449-458.

[Sa] E. Sayag, $(GL(2n, \mathbb{C}), Sp(2n, \mathbb{C}))$ is a Gelfand pair, *preprint*, arXiv :0810.1853 (2008).

Motivation :

Mes expériences successives de recherche et d'enseignement en mathématiques m'ont conforté dans l'idée d'en faire mon métier. J'espère pouvoir appliquer mes compétences acquises pour le poste de maître de conférences proposé.

Si je n'ai jamais été en poste à l'étranger, j'ai cependant pu entretenir des relations **internationales**. J'ai assisté à une école d'été à Cologne, et à des colloques à Oberwolfach, Zurich et Levico Terme. Je communique régulièrement avec des chercheurs étrangers. J'ai ainsi beaucoup échangé avec Dmitri Panyushev et Vladimir Popov. La recherche a un côté international très important et je tiens à ne pas négliger cet aspect en y participant autant que possible.

Le projet de recherche présenté plus haut constitue une suite naturelle de mon travail qui devrait pouvoir trouver quelques réponses rapidement. Bien entendu, ce projet présente seulement quelques possibilités parmi d'autres. J'ai travaillé dans plusieurs laboratoires à travers la France (Limoges, Grenoble, Lyon, Brest et Angers) sur des sujets parfois très différents. J'espère m'intégrer avec autant de facilité dans votre équipe. Pour cela, je suis prêt à me former à de **nouvelles thématiques** afin de collaborer activement à la recherche du laboratoire. En effet, j'attribue beaucoup d'importance à essayer d'appréhender un large spectre de mathématiques, comme peuvent en témoigner mes interventions variées en séminaire de doctorants (cf. Présentations), mes stages divers (cf. Autres expériences de recherche) ou mes participations à différentes écoles d'été (cf. Conférences suivies).

Côté **enseignement**, j'ai appris à travailler en équipe pédagogique pendant mon monitorat et mes postes d'ATER. J'avais des contacts réguliers avec les responsables d'UE pour lesquelles je donnais mes TDs (ou avec les autres intervenants lors de mes cours). Ceci permettait une meilleure réactivité pour répondre aux problèmes rencontrés par les étudiants. Mes feuilles de TD tenaient compte chaque année du niveau des étudiants et de l'avancement du cours avec une grande variété d'exercices afin de répondre à l'hétérogénéité de la (ou des) classes. Mon enseignement s'est aussi adapté à différentes filières plus ou moins techniques avec des exercices de modélisation et une approche plus concrète de certains problèmes. J'ai aussi participé à l'élaboration des sujets d'examens, à la correction de copies et à quelques jurys de fin de semestre. Je suis naturellement disposé à m'intégrer de la même façon dans votre équipe pédagogique et à adapter mon enseignement à différents publics. Concernant les masters enseignements, j'ai été attentif aux réformes à Brest et Angers ces deux dernières années et je pense être apte à y intervenir.

De plus, j'ai toujours eu un rapport étroit avec les sciences de l'**informatique** (cf. Divers). Je programme depuis la seconde : des calculatrices programmables par loisir, aux logiciels de calcul formel pour deux de mes articles. Concernant l'informatique théorique, le suivi de plusieurs modules au cours de ma scolarité m'a permis d'acquérir les bases dans un nombre important de domaines classiques (cf. Divers).

Enfin, je suis intéressé par la vie du laboratoire et du département en général. Ainsi, les quelques **responsabilités** que j'ai prises (cf. Divers) m'ont permis d'avoir une meilleure vision du fonctionnement des ces unités. Si je venais à être recruté dans votre unité, je participerai naturellement à ces tâches qui sont du ressort de tous.

Divers

Informatiques

UE suivies

Codes correcteurs d'erreur : Goppa et Reed Salomon (niveau M2)
Cryptographie par les modules de Drinfield (niveau M2)
Complexité et théorie des modèles (niveau M1)
Décidabilité et calculabilité (niveau L3)

Implémentations complètes réalisées

Compression exacte : Hoffmann+LZW (Caml)
Cryptographie par RSA (Matlab)
Une vingtaine de jeux sur TI80.

Langages de programmation J'ai eu l'occasion de programmer activement à différentes époques dans les quelques langages suivants.

- **Programmation** : Caml, MAPLE, Matlab, QBasic.
- **Pages Web** : HTML, PHP

Responsabilités

J'ai assumé diverses responsabilités au niveau de mon laboratoire sur la fin de ma thèse et lors de mon poste de demi-ATER.

Ainsi, j'ai été représentant des doctorants au conseil du laboratoire de mathématiques pendant l'année 2009-2010 et représentant des ATER au conseil du département de mathématiques de Décembre 2009 à août 2010.

Par ailleurs, j'ai été coorganisateur du séminaire des thésards en mathématiques de Brest pendant l'année 2009-2010.

Enfin, hors de l'université, j'ai été président de deux associations, une d'ultimate frisbee (1 an) et une de chorégraphie (3 ans).

Langues

- **Anglais** : Courant.
- **Allemand** : Scolaire.

Loisirs

Ultimate Frisbee, Informatique, Roller, Mauvais films, Bodyboard.

Pièces jointes au dossier :

- La déclaration de candidature.
- Une copie de mon passeport
- Une attestation du titre de Docteur de l'Université de Bretagne Occidentale.
- Le présent CV détaillé
- Une copie du rapport de soutenance de ma thèse.
- Une copie des rapports de Michel Brion et Dmitri Panyushev, rapporteurs de ma thèse (si le mode de candidature le permet).

Pièces devant être transmises sans l'intermédiaire du candidat :

- Un avis sur le projet de recherche par Thierry Levasseur, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale (Brest, UMR 6205).
- Une lettre de recommandation concernant la recherche par Michel Brion, Directeur de recherche à l'institut Fourier (Grenoble, UMR 5582).
- Une lettre de recommandation concernant la recherche par Dmitri Panyushev, Professeur à l'"Independant University of Moscow".
- Une lettre de recommandation concernant la recherche par Vladimir L. Popov, Professeur au "Steklov Mathematical Institute".
- Une lettre de recommandation pour l'enseignement par Jean-Jacques Loeb, Professeur à l'Université d'Angers.

Pièces que le candidat souhaite transmettre en cas d'audition :

- Un tiré à part de l'article *Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente des algèbres de Lie symétriques semi-simples* tel qu'il est paru dans les *Annales de l'institut Fourier.* (44 pages)
- Un tiré à part de l'article *Sheets of symmetric Lie algebras and Slodowy slices* tel qu'il est paru dans *Journal of Lie Theory.* (54 pages)
- Une copie de l'article *Irregular locus of the commuting variety of reductive symmetric Lie algebras and rigid pairs* (28 pages).