Représentations de carquois et modules sur les anneaux
Rapport de Stage de L3

Corentin Lambert
Encadré par Michael Bulois, Institut Camille Jordan

Table des matières

1 Introduction

Durant ce stage encadré par Michael Bulois, maitre de conférence à l'institut Camille Jordan à Saint-Étienne, j'ai d'étudié la notion de carquois et certaines de ses utilisations. Le premier objectif était d'étudier les trois premiers chapitre du livre d'I.Assem, de D.Simson et de A.Skowroński [ASS] portant sur les représentations de modules sur les carquois. Un deuxième objectif était tourné vers l'étude du théorème de Gabriel, comprendre son énoncé ainsi que sa démonstration, en se basant sur l'article de M.Brion [Br]. Ensuite, j'ai travaillé sur des exemples explicites en étudiant les représentations indécomposables sur certains carquois. J'ai aussi pu m'intéresser à certaines notions d'algèbre homologique et à la théorie des catégories, qui ne seront pas développées dans ce rapport.

Une première partie de ce rapport porte sur les notions d'algèbres et de modules que j'ai découvertes durant mon stage. On étudie ensuite les carquois ainsi qu'une association entre carquois et les algèbres basiques, pour représenter ensuite les modules sur ces objets. Dans la partie suivante on étudie le théorème de Gabriel qui est un résultat fort sur les carquois. Enfin dans une dernière partie on regarde une limitation de la théorie développée à travers les représentations de groupes.

2 Algèbre et Module

Avant d'attaquer la notion de carquois, la première partie de mon stage fut tournée vers les algèbres et les modules. Dans cette partie, je vais rappeler brièvement la définition d'une algèbre et d'un module, en plus de quelques définitions et propriétés qui seront utilisées plus loin. On pourra trouver les démonstrations de ces résultats dans le livre [ASS].

Dans toute la suite de ce rapport, on fixe un corps K algébriquement clos de caractéristique nulle. Les anneaux considérés seront associatifs, unitaires mais pas forcément commutatifs

Définition 2.1. *Une K-algèbre A est un anneau muni d'une structure de K-espace vectoriel et qui vérifie :*

$$\forall a, b \in A, \forall \lambda \in K, \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

Si A est une algèbre, c'est aussi un anneau, on peut donc définir la notion d'idéal à gauche (resp. à droite) I pour les algèbres : ce sont des espaces vectoriels tel que pour tout $a \in A, x \in I$, on ait $ax \in I$ (resp. $xa \in I$). On dit qu'un idéal est bilatère si c'est à la fois un idéal à gauche et à droite.

On définit un autre outil important pour les algèbres : le radical de Jacobson :

Définition 2.2. *Soit A une algèbre. On note* $\operatorname{Rad} A$ *le radical de Jacobson défini par l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de A*

On obtient ensuite les propriétés suivantes :

Proposition 2.3. *Soit A une algèbre, On a les propriétés suivantes :*

i) $\operatorname{Rad} A$ *est un idéal bilatère*

ii) $\operatorname{Rad} A$ *est l'intersection de tout les idéaux maximaux à droite*

iii) Les éléments de $\operatorname{Rad} A$ *sont les éléments x tels que pour tout $a \in A$, $1 - ax$ est inversible.*

iv) Les éléments de $\operatorname{Rad} A$ *sont les éléments x tels que pour tout $a \in A$, $1 - xa$ est inversible.*

v) Si I est un idéal bilatère nilpotent, alors $I \subset \operatorname{Rad} A$. Si de plus, A/I est isomorphe à une somme directe de copies de K, alors $I = \operatorname{Rad} A$.

Intéressons-nous maintenant à la notion de module sur une algèbre A.

Définition 2.4. *Soit A une algèbre. Un module à gauche M sur une algèbre A est un espace vectoriel sur K muni d'un produit externe $\cdot : A \times M \to M$ tel que :*

— $a.(x + y) = a.x + a.y$
— $(a + b).x = a.x + b.x$
— $(ab).x = a.(b.x)$
— $1.x = x$
— $a.(\lambda x) = (\lambda a).x = \lambda(a.x)$

pour tout $x, y \in M, a, b \in A, \lambda \in K$. On note A-Mod la catégorie des modules à gauches sur l'algèbre A.

On a une définition similaire pour les modules à droite. Sauf indication contraire, on considérera seulement des modules à gauche. Un sous-module N de M est un module inclus dans M. On dit qu'un module M est simple si ses seuls sous-modules sont $\{0\}$ et M. Un module est dit semi-simple s'il est somme directe de modules simples. On dit qu'un module est de dimension finie s'il est de dimension finie en tant que K-espace vectoriel.

On ne considèrera dans la suite que des modules et des algèbres de dimension finie. On peut voir une algèbre A comme un module à gauche que l'on notera ${}_A A$. On a alors ce résultat :

Proposition 2.5. *Soit A une algèbre de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) ${}_A A$ est semi-simple

ii) Tout module à gauche sur A est semi-simple

iii) $\operatorname{Rad} A = 0$

Par définition, une algèbre semi-simple est une algèbre qui vérifie une des propriétés précédentes. On a donc un moyen d'identifier les algèbres semi-simples avec le radical de Jacobson.

Définition 2.6. *Soit M un module sur une algèbre A. M est dit indécomposable s'il n'existe pas de modules M' et M'' non nuls tel que $M = M' \oplus M''$.*

Remarque 2.7. *Dans le cadre des espaces vectoriels, c'est-à-dire lorsque $K = A$, être simple et être indécomposable sont des notions équivalentes, ce qui n'est pas le cas en général. Par exemple, l'algèbre $K[X]/X^2$ vu comme un module sur elle-même n'est pas simple mais est indécomposable.*

Comme pour les espaces vectoriels, on a un théorème de décomposition

Théorème 2.8 (Krull-Schmidt)**.** *Soit M un module de dimension finie sur une algèbre A. Alors il existe des modules indécomposables $M_1, ..., M_p$ tel que $M = \bigoplus_{i=1}^{p} M_i$. De plus, les M_i sont uniques à isomorphismes près, et à permutation près.*

Il est moins puissant que pour les espaces vectoriels mais important pour bien définir certaines notions, notamment des notions liés aux idempotents.

Définition 2.9. *Soit A une algèbre. On dit que e est un idempotent si $e.e = e$. On dit que deux idempotents e_1, e_2 sont orthogonaux si $e_1.e_2 = e_2.e_1 = 0$. Si e est un idempotent, $1 - e$ est un idempotent orthogonal à e. On dit que e est un idempotent primitif s'il n'existe pas d'idempotents e_1, e_2 orthogonaux tel que $e = e_1 + e_2$. Une famille $\{e_1, ..., e_n\}$ est un ensemble complet d'idempotents lorsque $e_1, ..., e_n$ sont des idempotens primitifs deux à deux orthogonaux. Dans ce cas, on a en terme de module :*

$$_AA = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus ... \oplus Ae_n$$

De plus les Ae_i sont des modules indécomposables.

Par le théorème de décomposition, si on a deux ensembles complets d'idempotents, alors ces deux ensembles sont de même cardinalité. Cette remarque permettra dans la suite d'associer un carquois à n'importe quelle algèbre.

Il reste à définir la notion d'algèbre basique.

Définition 2.10. *Soit A une algèbre, $\{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents. On dit que A est une algèbre basique lorsque $Ae_i \ncong Ae_j$ pour tout $i \neq j$*

Proposition 2.11. *Soit A une algèbre. A est basique si et seulement si le quotient $A/\operatorname{Rad} A$ est isomorphe à $K \times ... \times K$.*

On utilisera cette proposition pour montrer que les algèbres résultantes des carquois sont basiques.

De plus, à chaque algèbre, on peut associer une algèbre basique. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble complet d'idempotent et $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_p}\}$ une plus grande sous famille d'idempotents possible de $\{e_1, ..., e_n\}$ tel que $Ae_{j_i} \ncong Ae_{j_k}$ pour tout $i \neq k$. On pose $e_A = e_{j_1} + ... + e_{j_p}$ et $A^b = e_A A e_A$. Alors, A^b est une algèbre basique d'unité e_A. Si on prend un autre ensemble complet d'idempotents, la même construction donne une algèbre isomorphe à A^b. On l'appelle l'algèbre basique associé à A. L'étude de cette algèbre est motivée par ce théorème :

Théorème 2.12. *Soit A une algèbre, A^b l'algèbre basique associée. On a alors une équivalence de catégorie entre A-Mod et A^b-Mod.*

3 Représentations de carquois

Mon stage s'est essentiellement tourné vers la découverte et l'appropriation des notions autour des carquois. Ces objets permettent de représenter en premier lieu des algèbres et des modules sur ces algèbres. Commençons d'abord par définir ces objets.

3.1 Définition d'un carquois

Définition 3.1. *Un carquois est la donnée d'un quadruplet* (Q_0, Q_1, s, t) *tel que :*

— Q_0 *est un ensemble dont les éléments sont les sommets du carquois*

— Q_1 *est un ensemble dont les éléments sont les flèches du carquois.*

— s *et* t *sont deux applications de* Q_1 *vers* Q_0 *qui associent respectivement la source et le but de la flèche.*

Dans la suite on représentera les sommets par des lettres. On note $\alpha : i \to j$ la flèche α qui a pour source le sommet i et pour but le sommet j. On considérera toujours des carquois finis, c'est à dire des carquois tel que Q_0 et Q_1 soient finis.

Un carquois peut être relié à la notion de graphe : Un carquois est un graphe orienté sans aucune limitation dans le nombre d'arcs entre les sommets. On peut aussi très bien avoir des flèches de la forme $\alpha : i \to i$

De plus les carquois peuvent être représentés sous forme de schéma. Pour cela, on représente chaque sommet par un point, chaque flèche par une flèche orientée de sa source vers son but.

Exemple 3.2. *Le carquois* $(\{i, j\}, \{\alpha, \beta\}, s, t)$ *avec* $\alpha : i \to j$ *et* $\beta : j \to i$ *peut être représenté par ce graphe :*

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "\alpha"] & j \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Définissons maintenant la notion de chemin : Un chemin de i vers j $(i, j \in Q_0)$ de longueur m dans un carquois est une suite finie de flèches $\alpha_1, ..., \alpha_m$ tel que $s(\alpha_l) = t(\alpha_{l+1})$ pour tout $l < m - 1$, $s(\alpha_m) = i, t(\alpha_1) = j$. À cette définition, on rajoute un chemin de longueur 0 associé à chaque sommet du carquois de source et but ce sommet. On les note ε_i pour $i \in Q_0$.

Définition 3.3. *Soit* Q *un carquois. On définit* KQ *le* K*-espace vectoriel librement engendré par les chemins. On munit* KQ *d'une structure d'algèbre avec l'opération interne que l'on définit sur les chemins par :*

— *Si* γ_1 *est un chemin de* i_1 *vers* j_1 *et* γ_2 *un chemin de* i_2 *vers* j_2 *avec* $j_1 = i_2$*, alors* $\gamma_2\gamma_1$ *est la concaténation des deux chemins*

— *Sinon* $\gamma_2\gamma_1 = 0$

KQ *est appelé l'algèbre des chemins du carquois*

Avec cette définition, on remarque que les $(\varepsilon_i)_{i\in Q_0}$ sont des idempotents orthogonaux deux à deux. On peut montrer que ces idempotents sont en plus primitifs et on a donc :

Proposition 3.4. *Soit* Q *un carquois. Alors :*

$$KQ = \bigoplus_{i\in Q_0} KQ\varepsilon_i$$

Et $(\varepsilon_i)_{i\in Q_0}$ *est un ensemble complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux.*

On peut maintenant regarder le radical de KQ. Notons R_Q l'idéal bilatère engendré par les chemins de longueur au moins 1. On obtient alors ce résultat dans le cadre des carquois sans cycle :

Proposition 3.5. *Soit* Q *un carquois fini acyclique. Alors* $\mathrm{Rad}(KQ) = R_Q$

Démonstration. Q est fini et acyclique. Il admet donc un chemin de taille maximale. Soit m la taille de ce chemin. Alors on a $R_Q^{m+1} = 0$. R_Q est donc un idéal bilatère nilpotent. De plus, $KQ/R_Q \cong K\varepsilon_1 \oplus ... \oplus K\varepsilon_n$ est isomorphe à n copies de K. Par la proposition 2.3, on a $\mathrm{Rad}\, KQ = R_Q$. □

De plus, en notant $\operatorname{Rad}^n(A) = (\operatorname{Rad} A)^n$ pour toute algèbre A, on obtient $\operatorname{Rad}^n(KQ) = R_Q^n$ avec R_Q^n l'ensemble des chemins de longueurs au moins n. On en déduit donc cette remarque :

Remarque 3.6. *Soit Q un carquois acyclique. Alors en notant $\overline{\alpha}$ la classe de α dans R_Q/R_Q^2 pour $\alpha \in Q_1$, la famille $(\overline{\alpha})_{\alpha\in Q_1}$ est une base de R_Q/R_Q^2.*

Et de façon plus générale, $\dim(\varepsilon_j R_Q^n \varepsilon_i / \varepsilon_j R_Q^{n+1} \varepsilon_i) = \dim(\varepsilon_j \operatorname{Rad}^n(KQ)\varepsilon_i / \varepsilon_j \operatorname{Rad}^{n+1}(KQ)\varepsilon_i)$ est égal au nombre de chemin entre i et j de longueur n. Cette remarque est importante lorsque l'on voudra associer un carquois à chaque algèbre.

Définition 3.7. *Soit Q un carquois, soit I un idéal bilatère de KQ. I est dit admissible s'il existe $m > 1$ tel que :*

$$R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$$

Si on a un carquois Q et un idéal admissible I, on appelle (Q, I) un carquois à relations. *L'algèbre associée au carquois à relations est KQ/I.*

Il est plus pratique de définir un idéal admissible par ses générateurs. Pour cela on utilise les *relations*. Une relation est une somme :

$$\rho = \sum_p \lambda_p c_p$$

où les c_p sont des chemins de longueur au moins 2, qui partagent la même source et le même but et $\lambda_p \in K$. Si $\rho_1, .., \rho_n$ sont des relations, on note $I = \langle \rho_1, ..., \rho_n \rangle$ l'idéal engendrée par $\rho_1, .., \rho_n$. L'utilisation des relations est motivée par ce théorème :

Proposition 3.8. *Soit Q un carquois fini, I un idéal admissible. Il existe alors des relations $\rho_1, ..., \rho_n$ tel que $I = \langle \rho_1, ..., \rho_n \rangle$.*

Démonstration. Soit I un idéal admissible. Montrons que I est de type fini. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $R_Q^m \subset I$. Il suffit donc de montrer que R_Q^m et I/R_Q^m sont de type fini.

R_Q^m est un module sur KQ généré par les chemins de longueur m. Comme Q est un carquois fini, il n'existe qu'un nombre fini de chemin de longueur m. Ainsi R_Q^m est engendré par un nombre fini d'élément.

I/R_Q^m est un espace vectoriel inclus dans KQ/R_Q^m. Or KQ/R_Q^m est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel, engendré par les chemins de longueurs inférieures strictement à m qui sont en nombre fini. Ainsi I/R_Q^m est un espace vectoriel de dimension finie et est donc de type fini.

Ainsi I est de type fini. Soit $\{\gamma_1, ..., \gamma_p\}$ des générateur de I. En remarquant que $\varepsilon_b \gamma_i \varepsilon_a$ est une relation, on a donc I qui est généré par $\{\varepsilon_b \gamma_i \varepsilon_a \mid a, b \in Q_0, i \in \{1, ..., p\}\}$. □

Exemple 3.9. *Reprenons le carquois*

$$i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} j$$

En posant $I = \langle \beta\alpha \rangle$, I est un idéal admissible de Q. Tous les chemins de taille au moins 3 sont dans I et $I \subset R_Q^2$.

Proposition 3.10. *Soit Q un carquois fini, I un idéal admissible. Alors KQ/I est une algèbre basique.*

Démonstration. Soit m tel que $R_Q^m \subset I$. On a alors $(R_Q/I)^m = (R_Q^m/I) = 0$. Ainsi R_Q/I est un idéal bilatère nilpotent. De plus on a $(KQ/I)/(R_Q/I) \cong KQ/R_Q$, donc $(KQ/I)/(R_Q/I)$ est isomorphe à n copies de K. Par la proposition 2.3, on a $\operatorname{Rad}(KQ/I) = R_Q/I$. De plus par la proposition 2.11, on en déduit que l'algèbre KQ/I est basique. □

3.2 D'algèbre à carquois

On a vu dans la partie précédente la définition d'un carquois à relations, ainsi que son algèbre associée. De plus, cette algèbre est basique. Renversons maintenant le problème et essayons de partir d'une algèbre basique et de lui associer un carquois à relations. On s'intéresse ici principalement à la construction. Les démonstrations peuvent se trouver dans le livre [ASS]

Dans la suite on fixe une algèbre A basique et on note $\{e_1, ..., e_n\}$ un ensemble complet d'idempotents orthogonaux 2 à 2 pour A.

Définition 3.11. *On note $Q_A = (Q_0, Q_1, s, t)$ le carquois défini par :*

- *$Q_0 = \{1, ..., n\}$ où n est le nombre d'idempotent*
- *Pour chaque sommet i, j, on considère une base $\{a_{i,j}^1, ..., a_{i,j}^{p_{i,j}}\}$ de $(e_j(\operatorname{Rad} A)e_i)/(e_j(\operatorname{Rad}^2 A)e_i)$ que l'on remonte dans A. À chaque élément de cette base on lui associe une flèche $\alpha_{i,j}^k$ de i vers j.*

L'utilisation des $(e_j(\operatorname{Rad} A)e_i)/(e_j(\operatorname{Rad}^2 A)e_i)$ pour construire le carquois est motivée par la remarque 3.6.

On considère une algèbre basique pour ne pas avoir de problème de définition. On a cette proposition :

Proposition 3.12. *Soit A une algèbre basique. Alors Q_A ne dépend pas du choix de l'ensemble complet d'idempotent.*

On aimerait avoir $KQ_A \cong A$. En général ce n'est pas le cas.

Exemple 3.13. *En prenant Q le carquois suivant :*

$$i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} j$$

KQ est de dimension infinie mais en posant $I = \langle \beta\alpha \rangle$, KQ/I est de dimension finie. On a donc $KQ \ncong KQ/I$ mais ces deux algèbres ont le même carquois associé.

Cependant, on a ce théorème :

Théorème 3.14. *Soit A une algèbre basique. Alors il existe un ideal admissible I de KQ_A tel que :*

$$A \cong KQ_A/I$$

Construisons cet idéal. On considère le morphisme d'algèbre $\phi : KQ_A \to A$ que l'on défini seulement sur les chemins de tailles 0 et 1 (car ils engendrent KQ) par :

$$\phi(\varepsilon_i) = e_i, \phi(\alpha_{i,j}^k) = a_{i,j}^k$$

On pose alors $I = \ker(\phi)$. En admettant que ϕ est surjective, ce qui est le cas quand l'algèbre est basique, on obtient $KQ_A/I \cong A$.

Cependant, l'idéal n'est pas unique. Par exemple, en reprenant le carquois :

$$i \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} j$$

et en posant $I_1 = \langle \beta\alpha \rangle, I_2 = \langle \alpha\beta \rangle$ On a $I_1 \neq I_2$ mais $KQ/I_1 \cong KQ/I_2$.

3.3 Représentation de carquois et module

Maintenant que l'on a associé un carquois à relations à chaque algèbre, on peut maintenant étudier les modules sur une algèbre donnée en étudiant les représentations de carquois.

Définition 3.15. *Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois. Une représentation de carquois est la donnée d'espaces vectoriels $(E_i)_{i\in Q_0}$ pour chaque sommet, d'applications linéraires $(f_\alpha : E_{s(\alpha)} \to E_{t(\alpha)})_{\alpha\in Q_1}$ pour chaque flèche. On note $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ une telle représentation. On note Rep(Q) la collection des représentations du carquois Q.*

Définition 3.16. *Soit $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1}), M' = ((E'_i)_{i\in Q_0}, (f'_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ deux représentations de Q. On définit $M \oplus M'$ la représentation $M \oplus M' = ((E_i \oplus E'_i)_{i\in Q_0}, (g_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ avec $g_\alpha = f_\alpha \oplus f'_\alpha$ définit par $g_\alpha(x, y) = (f_\alpha(x), f'_\alpha(y))$ pour $(x, y) \in E_i \oplus E'_i$.*

Définition 3.17. *Soit Q un carquois, $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1}), M' = ((E'_i)_{i\in Q_0}, (f'_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ deux représentations de carquois. Un morphisme entre M et M' est la donnée d'un uplet $\varphi = (\varphi_i)_{i\in Q_0}$ tel que pour tout i, $\varphi_i \in$ Hom(E_i, E'_i) et pour tout $\alpha \in Q_1$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
E_{s(\alpha)} \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "\varphi_{s(\alpha)}"'] & E_{t(\alpha)} \arrow[d, "\varphi_{t(\alpha)}"] \\
E'_{s(\alpha)} \arrow[r, "f'_\alpha"'] & E'_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

On dit que qu'un morphisme $\varphi = (\varphi_i)_{i\in Q_0}$ est un isomorphisme de représentations si φ_i est un isomorphisme pour tout $i \in Q_0$.

On peut prolonger les applications f_α sur $\bigoplus_{i\in Q_0} E_i$ en précomposant par le projecteur sur $E_{s(\alpha)}$.

Si c est un chemin dans le carquois Q et M une représentation de Q, on lui associe l'application de $\mathrm{End}(\bigoplus E_i)$ f_c définie par la composition des f_α selon le chemin. On étend cette définition par linéarité sur tous les éléments de KQ.

Si I est un idéal admissible, on dit que $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ est une représentation du carquois à relations (Q, I) si pour tout $\rho \in I, f_\rho = 0$. On note $\mathrm{Rep}(Q, I)$ la catégorie des représentations du carquois à relations (Q, I).

L'étude des carquois pour étudier les modules est grandement motivée par ce théorème :

Théorème 3.18. *Il y a une équivalence de catégorie entre KQ/I-Mod et Rep(Q, I)*

Démonstration. Regardons comment passer d'une représentation de carquois à un module sur KQ/I :

Soit $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ une représentation du carquois à relations (Q, I). On commence par construire un KQ-module. Soit $F(M) = \bigoplus_{i\in Q_0} E_i$ le module défini par le produit externe suivant :

$$\forall x \in F(M), \forall \rho \in KQ, \rho.x = f_\rho(x)$$

Alors pour $\rho \in I$, on a $\rho.x = f_\rho(x) = 0$ car M est une représentation de carquois à relations. On peut donc voir $F(M)$ comme un module sur KQ/I.
Étudions maintenant la construction inverse. Soit N un module, $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ un ensemble complet d'idempotent deux à deux orthogonaux de KQ/I. On lui associe la représentation de carquois $G(N) = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ défini par :

— $E_i = \varepsilon_i N$

— $f_\alpha = x \mapsto \overline{\alpha}x$ où $\overline{\alpha} = \alpha + I$ la classe de α dans KQ/I.

Vérifions que si $\alpha : i \to j$ est une flèche, alors $f_\alpha(\varepsilon_i N) \subset \varepsilon_j N$. Pour cela il suffit de remarquer que dans KQ/I, on a $\alpha = \varepsilon_j \alpha \varepsilon_i$. De plus par composition des chemins, on a pour tout $\rho \in I$, $f_\rho(x) = \rho.x = 0$

On obtient bien une représentation du carquois à relations (Q, I). Cependant pour avoir une équivalence de catégories, il faut aussi étudier les transformations des morphismes.

Soient $M, M' \in \mathrm{Rep}(Q, I)$, $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$ un morphisme de représentations entre M et M'. On note $F(M) = \bigoplus_{i \in Q_0} E_i$ et $F(M') = \bigoplus_{i \in Q_0} E'_i$ les modules associés à M et M' définit plus haut. On associe alors l'application :

$$\phi : \begin{array}{ccc} F(M) & \to & F(M') \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_2(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

Vérifions que c'est bien un morphisme de module. ϕ est bien linéaire et on sait que KQ/I est engendré par les chemins de taille 0 et 1. On a pour $i \in Q_0$ et $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker :

$$\phi(\varepsilon_i x) = \phi((\delta_{i,j} x_j)_{j \in \{1,..,n\}}) = (\delta_{i,j} \varphi_j(x_j))_{j \in \{1,..,n\}} = \varepsilon_i \phi(x)$$

D'autre part avec $\alpha : i \to j \in Q_1$:

$$\phi(\overline{\alpha} x) = (\phi \circ f_\alpha)(x) = (f'_\alpha \circ \phi)(x) = \overline{\alpha} \phi(x)$$

qui résulte du diagramme commutatif précédent. Ainsi ϕ est un morphisme de module.

Réciproquement, soit ϕ est un morphisme de module entre N et N', soient $G(N)$, $G(N')$ les représentations associées. Remarquons ceci : soit $x \in N, \phi(\varepsilon_i x) = \phi(\varepsilon_i^2 x) = \varepsilon_i \phi(\varepsilon_i x)$ Ainsi la restriction de ϕ à $\varepsilon_i N$ induit une application linéaire entre $\varepsilon_i N$ et $\varepsilon_i N'$. On pose donc $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$, avec φ_i la restriction de ϕ à $\varepsilon_i N$. On peut vérifier ensuite que φ est un morphisme de représentation entre $G(N)$ et $G(N')$.

Vérifions maintenant que pour tout module N sur KQ/I, $F(G(N))$ est isomorphe à N. Pour cela, il suffit de vérifier que le produit externe de $F(G(N))$ est le même que celui de N. Soit $\alpha \in Q_1, i \in Q_0, x \in F(G(N))$. On a

$$\overline{\varepsilon_i}.x = (\delta_{i,j} x_i)_{j \in \{1,...,n\}} = \varepsilon_i x$$

et aussi

$$\overline{\alpha}.x = f_\alpha(x) = \overline{\alpha} x$$

Comme KQ/I est engendré par les chemins de tailles inférieures à 1, le produit externe est donc bien le même. De même on peut obtenir que M et $G(F(M))$ sont isomorphes. □

On a même obtenu, en plus de ce théorème, une construction explicite pour passer d'un module à un carquois et réciproquement. On peut déjà identifier les modules simples de n'importe quelle algèbre basique.

Proposition 3.19. *Soit (Q, I) un carquois à relations. Les modules simples sur l'algèbre KQ/I sont les représentations $(S(i))_{i \in Q_0}$ définies par :*

$$S(i) = ((E_j)_{j \in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in Q_1}) \text{ tel que } E_j = K \text{ si } i = j, \{0\} \text{ sinon et } \forall \alpha,\ f_\alpha = 0.$$

4 Théorème de Gabriel

On a vu que les carquois peuvent être utilisés pour avoir des informations sur les modules d'une algèbre donnée en construisant un carquois associé à l'algèbre. Regardons maintenant un des théorèmes importants qui porte sur les carquois sans relation : le théorème de Gabriel. On se place dans la suite dans le cadre des carquois sans relation sans cycle dont le graphe non orienté est connexe. On se place aussi dans le cas où $K = \mathbb{C}$

4.1 Carquois de type fini

Commençons par introduire la notion de vecteur dimension :

Définition 4.1. *Soit* $M = ((E_i)_{i\in Q_0}, (f_\alpha)_{\alpha\in Q_1})$ *une représentation de* Q*. Le vecteur dimension associé à* M *est le vecteur :*

$$\underline{\dim M} = \begin{bmatrix} \dim E_1 \\ \dim E_2 \\ \vdots \\ \dim E_n \end{bmatrix}$$

On déduit rapidement de cette définition la remarque suivante découlant de la proposition 3.19 :

Remarque 4.2. *Les vecteurs dimensions des représentations simples de* Q *sont les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{C}^{Q_0}$*.*

On a vu la définition de deux représentations isomorphes. Il est classique en algèbre de considérer ces objets à isomorphisme près et donc de considérer les classes d'isomorphisme. De plus il est clair que les vecteurs dimensions sont stables par isomorphisme. Il en vient la définition suivante :

Définition 4.3. *Soit* Q *un carquois. On dit qu'un carquois est de type fini s'il existe un nombre fini de classes d'isomorphisme de représentations de* Q *pour chaque vecteur dimension.*

Le théorème de Gabriel permet de connaître précisément les carquois de type fini :

Théorème 4.4 (Gabriel)**.** *Un carquois* Q *est de type fini si et seulement si son graphe non-orienté associé est un de ces diagrammes de Dynkin suivant :*

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
A_n := & \bullet & - & \bullet & \dots & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & & & & \text{(carquois à } n \text{ points}, n \geqslant 1) \\
D_n := & \bullet & - & \bullet & \dots & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & & & & \text{(carquois à } n \text{ points}, n \geqslant 4) \\
 & & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & & \bullet & & & & & & \\
E_6 := & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & & & & \\
 & & & & & | & & & & & & & & \\
 & & & & & \bullet & & & & & & & & \\
E_7 := & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & & \\
 & & & & & & & | & & & & & & \\
 & & & & & & & \bullet & & & & & & \\
E_8 := & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
 & & & & & & & & & | & & & & \\
 & & & & & & & & & \bullet & & & &
\end{array}$$

Intéressons-nous à quelques éléments de démonstration de ce théorème, tirés de l'article suivant [Br]. Tout d'abord, trouvons une nouvelle formulation de ce théorème avec un objet plus simple à utiliser.

4.2 La forme de Tits

Définition 4.5. *Soit* Q *un carquois. La forme de Tits associée au carquois* Q *est la forme quadratique* q_Q *définie par :*

$$q_Q := \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{Q_0} & \to & \mathbb{R} \\ \overline{x} & \mapsto & \sum\limits_{i\in Q_0} x_i^2 - \sum\limits_{\alpha\in Q_1} x_{s(\alpha)}x_{t(\alpha)} \end{array}$$

Cette forme quadratique a une importance majeure dans le théorème de Gabriel. En effet, on a le théorème combinatoire suivant :

Théorème 4.6. *Soit Q un carquois. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

— *La forme de Tits q_Q est définie positive*

— *Pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}, q_Q(\underline{n}) \geqslant 1$*

— *Le sous-graphe associé au carquois Q est un diagramme des diagrammes de Dynkin précédents.*

On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans le livre suivant [Be]. Ainsi, on se ramène directement à l'étude de la forme de Tits pour démontrer le théorème de Gabriel.

4.3 Éléments de démonstration

La démonstration du théorème de Gabriel que j'ai étudiée comporte des éléments de géométrie algébrique et de l'algèbre homologique. Certains résultats seront admis lors de la démonstration de ce théorème.

On montrera seulement le sens direct dans ce rapport. Soit Q un carquois de type fini, $\underline{n}$ un vecteur dimension. On note $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ la catégorie des représentations de Q tel que $E_i = \mathbb{C}^{n_i}$. Toute représentation de carquois est isomorphe à une telle représentation. Ainsi, un élément de $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ peut être vu comme un élément de $\prod\limits_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n_{s(\alpha)}}, \mathbb{C}^{n_{t(\alpha)}})$.

Définition 4.7. *Soit $\underline{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$. On note $\mathrm{GL}(\underline{n})$ le groupe produit :*

$$\mathrm{GL}(\underline{n}) = \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(n_i)$$

On note $\underline{g}$ les éléments de $\mathrm{GL}(\underline{n})$.

On considère maintenant l'action de groupe de $\mathrm{GL}(\underline{n})$ sur $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ définie par :

$$\phi_{\underline{n}} : (\underline{g}, M) \mapsto \underline{g}.M = \left(g_{t(\alpha)} \circ f_\alpha \circ g_{s(\alpha)}^{-1} \right)_{\alpha \in Q_1}$$

Ainsi, dire que Q est un carquois de type fini revient à dire que pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$, $\phi_{\underline{n}}$ admet un nombre fini d'orbites.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on note $zI_{\underline{n}} := (kI_{n_i})_{i \in Q_0}$ et $\mathbb{C}^* I_{\underline{n}}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\underline{n})$ fermé par ces applications. Remarquons que pour tout élément $\underline{g}$ de $\mathbb{C}^* I_{\underline{n}}, \underline{g}.M = M$ pour tout $M \in \mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$. On peut donc quotienter $\mathrm{GL}(\underline{n})$ par $\mathbb{C}^* I_{\underline{n}}$ en conservant l'action sur $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$. On note $\mathrm{PGL}(\underline{n})$ ce quotient.

On peut voir $\mathrm{GL}(\underline{n})$, $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ et $\mathrm{PGL}(\underline{n})$ comme des variétés algébriques, et donc associer des dimensions à ces objets. On remarquera alors que

$$\dim \mathrm{GL}(\underline{n}) = \sum_{i \in Q_0} n_i^2, \ \dim \mathrm{PGL}(\underline{n}) = \dim \mathrm{GL}(\underline{n}) - 1, \ \dim \mathrm{Rep}(Q, \underline{n}) = \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)}$$

En particulier, on a :

$$q_Q(\underline{n}) = \dim \mathrm{GL}(\underline{n}) - \dim \mathrm{Rep}(Q, \underline{n}) = 1 + \dim \mathrm{PGL}(\underline{n}) - \dim \mathrm{Rep}(Q, \underline{n}) \tag{1}$$

Par hypothèse, $\phi_{\underline{n}}$ admet un nombre fini d'orbites. En prenant $\{M_1, ..., M_p\}$ un ensemble de représentants pour chaque orbite, on a

$$\mathrm{Rep}(Q, \underline{n}) = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{M_i} \tag{2}$$

où $\mathcal{O}_{M_i}$ est l'orbite de M_i sous l'action de $\mathrm{PGL}(\underline{n})$.

On admet le résultat suivant :

Proposition 4.8. *Soit X une variété munie d'une action de groupe par un groupe algébrique G. Toutes les composantes connexes de l'orbite :*

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$$

ont pour dimension $\dim G - \dim G_x$ *où G_x est le stabilisateur de x.*

On en déduit donc que pour tout orbite $\mathcal{O}_M, \dim \mathcal{O}_M \leqslant \dim \mathrm{PGL}(\underline{n})$.

Une variété X est dite *irréductible* si elle n'est pas l'union de deux fermés strictement inclus dans X. En géométrie algébrique, on travaille avec la topologie de Zariski dans $\mathbb{C}^p$, dont les fermés sont les zéros communs d'une famille de polynômes à p indéterminées. On obtient alors ce résultat important :

Proposition 4.9. *$\mathbb{C}^p$ est une variété algébrique irréductible.*

Démonstration. Tout d'abord, montrons par récurrence sur le nombre d'indéterminées que si un polynôme s'annule sur un ouvert non vide classique de $(\mathbb{C}^p, ||.||)$, alors le polynôme est nul. Pour $p = 1$ le résultat est clair. Soit $p > 1$, et P un polynôme à p indéterminées qui s'annule sur l'ouvert O. On peut supposer, quitte à diminuer O, que O est une boule ouverte pour la norme infinie. Il existe alors des segments ouverts $I_1, ..., I_n$ tels que $O = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$. Notons $O' = I_2 \times ... \times I_n$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}^{p-1}$. Ainsi pour tout $x_1 \in I_1$, le polynôme $(x_2, ..., x_n) \mapsto P(x_1, ..., x_n)$ s'annule sur O' et est donc nul par récurrence. Donc P est nul sur $I_1 \times \mathbb{C}^{p-1}$. Ainsi pour tout $(x_2, ..., x_n)$, le polynôme $x_1 \mapsto P(x_1, ..., x_n)$ s'annule sur I_1 donc est nul. Donc P est le polynôme nul.

Soit F un fermé dans la topologie de Zariski. Si $F \neq \mathbb{C}^p$, alors il existe un polynôme P non nul tel que $F \subset P^{-1}(0)$. Or comme P est non nul, $P^{-1}(0)$ est d'intérieur vide dans $(\mathbb{C}^p, ||.||)$, donc F est un fermé d'intérieur vide dans $(\mathbb{C}^p, ||.||)$.

Soient F_1, F_2 deux fermés dans la topologie de Zariski tel que $\mathbb{C}^p = F_1 \cup F_2$. Comme $(\mathbb{C}^p, ||.||)$ est un espace complet donc de Baire, F_1 ou F_2 n'est pas d'intérieur vide, donc $F_1 = \mathbb{C}^p$ ou $F_2 = \mathbb{C}^p$ Ceci conclut la preuve de l'irréductibilité de $\mathbb{C}^p$. □

Ainsi $\mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ est irréductible, donc par l'équation (2) il existe un M_i tel que $\overline{\mathcal{O}_{M_i}} = \mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$. Pour conclure on a besoin de ce résultat que l'on admettra :

Proposition 4.10. *Si X est une variété,* $\dim X = \dim \overline{X}$

Ainsi, on a $\dim \mathcal{O}_{M_i} \leqslant \dim \mathrm{PGL}(\underline{n})$ d'une part, $\dim \mathcal{O}_{M_i} = \dim \mathrm{Rep}(Q, \underline{n})$ d'autre part. Donc $\dim \mathrm{Rep}(Q, \underline{n}) \leqslant \dim \mathrm{PGL}(\underline{n})$. Ainsi par la formule (1), on a $q_Q(\underline{n}) \geqslant 1$ pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$, donc q_Q est définie positive.

5 Limitations des carquois

Les carquois sont des outils utiles pour étudier des algèbres et des modules. Cependant ces objets restent limités et ne permettent pas de tout simplifier. Illustrons ce phénomène pour les représentations de groupes finis.

Soit G un groupe fini. On construit l'algèbre $\mathbb{C}G$ comme étant l'espace vectoriel engendré par les éléments $(e_g)_{g \in G}$ muni de la multiplication que l'on définit seulement sur cette base par :

$$e_g.e_h = e_{gh}$$

Un élément de $\mathbb{C}G$ peut être écrit sous la forme d'une somme :

$$\sum_{g \in G} \lambda_g e_g$$

Avec $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

Définition 5.1. *Soit G un groupe fini. Une représentation de groupe est la donnée d'une action linéaire de groupe $\rho : G \to GL(V)$ où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie. On note (ρ, V) une telle représentation. On définit* $\mathrm{Rep}(G)$ *l'ensemble des représentations de G.*

Soit G un groupe fini, (ρ, V) une représentation finie. On peut voir V comme un $\mathbb{C}G$-module par l'opération externe :

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g e_g\right).x = \sum_{g\in G} \lambda_g \rho(e_g)(x)$$

Avec $x \in V$. Par cette identification on a le théorème suivant

Théorème 5.2. *Il existe une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathbb{C}G$-modules de dimension finie et la catégorie des représentations de G.*

De plus, l'étude des représentations de groupe permet d'aboutir au théorème de Maschke

Théorème 5.3. *Soit G un groupe fini. Alors toute représentation est semi-simple.*

Par l'équivalence de catégorie, on a le lemme suivant :

Corollaire 5.4. *Tout module sur l'algèbre $\mathbb{C}G$ est semi-simple*

L'étude des représentations de groupe permet de montrer que le nombre de modules simples à isomorphismes près sur l'algèbre $\mathbb{C}G$ correspond au nombre de classes de conjugaisons dans le groupe G.

Ainsi le carquois $Q_{\mathbb{C}G}$ associé à l'algèbre $\mathbb{C}G$ est un carquois à n points avec n le nombre de classes de conjugaison de G. Il est sans flèche car dans une algèbre semi-simple, on a $\mathrm{Rad}(\mathbb{C}G) = 0$ par la proposition 2.5. Une représentation sur ce carquois est donc juste la donnée de n espaces vectoriels. Le carquois dans ce cas est donc un outil très limité par rapport aux représentations des groupes finis pour étudier les groupes. Cependant il permet de trouver la décomposition en somme directe de modules indécomposables de n'importe quel module sur $\mathbb{C}G$.

Les représentations en général permettent d'étudier des objets plus facilement. Le souci principal cependant est que cela entraîne une perte d'information. Dans le cadre des représentations de groupes, on a une perte d'information sur le groupe en lui-même. Les carquois ne permettent pas par exemple de retrouver le cardinal du groupe avec seulement l'étude des représentations du carquois correspondant. De même pour les représentations de groupes linéaires : deux groupes non isomorphes peuvent avoir la même table de caractères.

Références

[ASS] Assem Ibrahim ; Simson Daniel ; Skowroński Andrzej, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory.* London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[Br] Brion Michel, *Representations of quivers. Geometric methods in representation theory. I*, 103–144, Sémin. Congr., 24-I, Soc. Math. France, Paris, 2012

[Be] D. J. Benson, *Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, Cambridge University Press, 1991.