

# COURS SUR LA LOGIQUE FORMELLE

TRISTAN CANALE ET GEOFFREY JUST

24 mai 2016

Nous voudrions particulièrement remercier M. Bulois, Maitre de Conférence en Mathématiques à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, d'abord pour nous avoir trouvé ce sujet des plus intéressants, mais également pour tout le temps qu'il a bien voulu nous consacrer au cours de ce semestre, aussi bien face à nous, que devant nos ébauches de travail, et enfin, pour son indéfectible patience à notre égard.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Première partie : les fondements de la logique mathématique</b>	<b>4</b>
2.1	Définitions préalables . . . . .	4
2.2	Axiômes et règles d'inférence . . . . .	6
2.3	Utilisation des tables de vérité . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Deuxième partie : le raisonnement au-delà la table de vérité</b>	<b>9</b>
3.1	Raisonnement sur les tables de vérité . . . . .	9
3.2	Raisonnement par déduction . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Troisième partie : le Théorème de complétude</b>	<b>12</b>
4.1	Fondations . . . . .	12
4.2	Théorème et Démonstration . . . . .	13
4.2.1	Sens direct . . . . .	13
4.2.2	Préliminaires au sens indirect . . . . .	15
4.2.3	Sens indirect . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>19</b>

# 1 Introduction

Il est fréquent d'entendre "c'est logique" lorsque quelqu'un tente de partager son point de vue. Cette expression qui semble anodine, demande pourtant à ceux qui l'entendent d'adopter le raisonnement de celui qui la dit. Typiquement, cette expression sous-entend une évidence dans les propos qui la précède, mais en réalité derrière cela se cache tout un raisonnement, qu'il soit par déduction, par l'absurde, ou par élimination. Les points de logique mathématique que nous allons ici développer peuvent être vus comme la formalisation de cette réflexion qui nous semble "logique".

Ce fut Aristote qui, le premier, commença à théoriser la logique formelle, à ceci près que sa logique était beaucoup plus générale, et englobait tous les domaines scientifique. En réalité la logique d'Aristote avait plus un but philosophique. C'est plus Euclide qui écrivit les premiers fondements de la logique formelle mathématique dans son œuvre : "Les éléments" vers 300 avant Jésus Christ. Mais la logique formelle moderne que nous allons étudier est relativement récente, elle ne date que du XXème siècle, elle fut introduite par Alfred Tarski dans son œuvre "Le concept de vérité dans les langages formalisés".

Ce cours a pour but d'énoncer et de démontrer le théorème de complétude. Pour ce faire, nous allons tout d'abord présenter en détail les bases et le vocabulaire de la logique formelle, de sorte à bien illustrer toutes les notations qui figureront dans le théorème de complétude et sa démonstration, ainsi que l'utilisation remarquable des tables de vérité pour déterminer la véracité d'un énoncé "simple". Ensuite nous verrons les fondements et l'utilisation du raisonnement par l'absurde en logique formelle et du raisonnement par déduction. Ces raisonnements logiques auront pour but de remplacer la tables de vérité qui sont rapidement mal adaptées pour des énoncés complexes. Et enfin, nous présenterons le théorème de Complétude et nous réaliserons sa démonstration dans le sens direct et indirect tout en vous exposant les postulats qui sont nécessaires a son bon fonctionnement.

## 2 Première partie : les fondements de la logique mathématique

### 2.1 Définitions préalables

La théorie de la logique mathématique fait appel à un vocabulaire et des symboles particuliers, dont les principaux, ceux dont nous nous servirons plus tard, vont être défini ici.

**Définition 1.** Une proposition atomique ou variable est une affirmation simple soit vraie, soit fausse.

**Définition 2.** Une proposition est composée de propositions atomiques, reliées entre-elles par des connecteurs logiques ( $\supset, \neg, \vee, \wedge$ ) On va revenir sur ce qu'est les connecteurs logiques tout de suite.

**Définition 3.** Une table de vérité est un tableau donnant la vérité d'une proposition (vraie V ou fausse F). Elle peut faire office de démonstration, nous allons y revenir plus tard dans cette partie.

Comme on l'a expliqué précédemment, des propositions atomiques liées entre elles par des connecteurs logiques forment une proposition plus complexe. (Cela permet d'obtenir des énoncé plus varié mais facile à étudier à l'échelle atomique). Nous allons maintenant vous définir ces différents connecteurs :

- La négation  $\neg$  sera employée devant une proposition pour signifier "non P". Sa table de vérité est fausse lorsque P est vrai, et inversement.

*Exemple.* La table de vérité de  $P$  et  $\neg P$  est donc :

$P$	$\neg P$
V	F
F	V

- Le symbole  $\wedge$  signifie "ET" et s'appelle la conjonction. Alors  $A \wedge B$  n'est vrai que lorsque A et B sont tous deux vrais.

En effet, la table de vérité de  $A \wedge B$  est :

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Le symbole  $\vee$  signifie "OU" et s'appelle la disjonction inclusive. Alors  $A \vee B$  n'est faux que lorsque A et B sont tous deux faux.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

En effet, la table de vérité de  $A \vee B$  est :

- Le symbole  $\supset$  C'est un opérateur logique binaire qui traduit le SI...ALORS... du langage naturel. L'énoncé si A alors B s'écrira  $A \supset B$  et pourra se lire

A	B	$A \supset B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

"A implique B". Voici sa table de vérité :

On remarque que si B est faux et que  $A \supset B$  est vrai, on peut en conclure que A est faux.

- Le symbole  $\subset\supset$  est un opérateur binaire qui traduit le "EQUIVALENT" du langage courant, et se lit " A équivaut à B". Cela signifie que A et B ont la même valeur de vérité. (seront vraies et fausses en même temps).

A	B	$A \subset\supset B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Voici sa table de vérité :

**Définition 4.** Un modèle  $\mathcal{M}$  attribue à des propositions atomiques un état, vrai ou faux.

**Exemple.**  $A = V, B = V, C = F$  est un modèle dans lequel les propositions A et B sont vraies, et C est fausse.

**Définition 5.** Un axiome est une proposition que l'on admet, et sur laquelle on base tous nos raisonnements logiques.

**Définition 6.** Une règle d'inférence est une règle qui permet de déduire (ou 'dérivée') des propositions, à partir d'autres propositions. On notera alors  $A \rightarrow B$  si l'on peut déduire B de A.

**Définition 7.** Une proposition est dite prouvable ou dérivable, et elle sera précédée de  $\vdash$ , lorsque que l'on peut la dériver, à l'aide de règles d'inférences, à partir d'un ou de plusieurs axiomes.

**Définition 8.** Une tautologie, qui sera précédée par  $\models$ , est une proposition qui est toujours vraie, quelque soit le modèle.

**Exemple 9.** Si  $P$  est une tautologie, sa table de vérité sera donc :

$P$
$V$
$V$

**Exemple 10.** Le tiers exclu  $A \vee \neg A$  est une tautologie puisque  $A$  et  $\neg A$  ne seront jamais faux ensemble.

## 2.2 Axiômes et règles d'inférence

Avant de poursuivre, il nous faut définir les notations propres aux règles d'inférence :

- Le symbole  $\rightarrow$  Ce symbole signifie qu'on avait ce qui précède ce symbole (aussi bien à gauche de celui-ci que sur la ligne précédente) et qu'en appliquant une règle d'inférence, on a obtenu ce qui suit ce symbole.
- Le symbole  $\leftrightarrow$  est alors utilisé pour la même signification que  $\rightarrow$  sauf que cela fonction dans les deux sens. Autrement, la règle d'inférence sous-entendu par ce symbole permet aussi bien de passer du membre de gauche à celui de droite que de celui de droite à celui de gauche.

Dans ce cours, nous allons utiliser les axiomes et règles d'inférences suivantes où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des propositions quelconques.

**Axiômes.** (a)  $A \supset (B \supset A)$   
 (b)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$   
 (c)  $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$

**Règles d'inférence.** (1) Definitionally equivalent : dans une proposition quelconque, on peut procéder aux changements suivants :

- (i)  $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \supset B)$
- (ii)  $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$
- (iii)  $(A \subset B) \leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (B \supset A))$

(2) Modus Ponens :  
 $(A, (A \supset B)) \rightarrow B$

## 2.3 Utilisation des tables de vérité

On a dit plus tôt que les tables de vérité avaient valeur de démonstration (rèf; page 4, point 2), puisqu'on peut dire que deux énoncés sont équivalents si l'on

peut les remplacer l'un par l'autre, sans que la véracité du discours soit affectée. Autrement dit, deux propositions sont équivalentes si elles ont la même table de vérité, ce qui explique le fait que l'on puisse utiliser les tables pour démontrer un énoncé. Cela dit, ce que nous allons faire maintenant ne signifie pas que les énoncés ainsi démontrés sont prouvables (p6 définition 7).

**Exemples.** La commutativité du "OU"  $\vee$  :

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$Q \vee P$
$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$

Les tables de vérité des deux membres sont bien les mêmes, ils sont donc bien équivalents.

L'associativité du "OU"  $\vee$  :

$P$	$Q$	$R$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

Les tables de vérité des deux membres sont bien les mêmes, ils sont donc bien équivalents.

La distributivité du "OU"  $\vee$  sur le "ET"  $\wedge$  :

$P$	$Q$	$R$	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

Les tables de vérité des deux membres sont bien les mêmes, ils sont donc bien équivalents.

**Exemple 11.** Le théorème de De Morgan appliqué au "ET" :

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

Les tables de vérité des deux membres sont bien les mêmes, ils sont donc bien équivalents.



### 3 Deuxième partie : le raisonnement au-delà la table de vérité

On peut remarquer que jusqu'à présent, la principale technique de démonstration de la véracité de propositions est d'avoir recours à une table de vérité.

**Proposition 12.** *Dans une table de vérité, le nombre de lignes dépend du nombre de propositions atomiques distinctes qui composent l'énoncé étudié. Si on appelle  $n$  ce nombre, alors la table de vérité possède  $2^n$  lignes.*

*Démonstration.* Celle-ci est assez intuitive dans le sens où on se rappelle que le nombre de lignes d'une table de vérité est surtout le nombre de combinaisons possible entre les valeurs des différentes propositions atomiques. Or chacune d'elles n'a que deux valeurs possibles ("vrai" ou "faux"). Alors, le nombre de combinaisons pour  $n$  propositions atomiques à deux valeurs possibles est  $2^n$ .

En conséquence, pour des énoncés composés de beaucoup de propositions atomiques, les tables de vérité deviennent rapidement énormes, longues à faire et surtout perdent beaucoup de leur clarté. On peut donc dire que cette méthode reste intéressante pour un ordinateur, mais à la main, elle est rapidement contraignante, sans compter le fait que plus un énoncé sera riche en opérateurs logiques, plus son nombre de colonnes deviendra important.

Cette méthode relativement simple par sa mécanique, se révèle des plus mal adapté à l'étude d'énoncé complexe.

Voici donc d'autres méthodes couramment utilisées.

#### 3.1 Raisonnement sur les tables de vérité

Cette technique de raisonnement sur les tables de vérité est assez similaire au principe de raisonnement par l'absurde, classique en mathématiques. Elle a pour but de démontrer qu'un énoncé (non atomique) est une tautologie.

Pour ce faire, on va supposer qu'il existe au moins une combinaison des valeurs de vérité (V ou F) des propositions atomiques qui le composent, tel que cet énoncé soit faux.

On montrera alors que cette hypothèse, conduit à une absurdité (ou à une contradiction), et donc, on pourra conclure que notre énoncé est toujours vrai, que c'est une tautologie.

**Exemple 13.** Soit  $p$ ,  $q$  et  $r$  des propositions atomiques quelconques. Montrons par l'absurde que l'énoncé  $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$  est une tautologie.

Pour ce faire, on suppose qu'il existe un modèle dans lequel il est faux. Or, par définition de l'opérateur de l'implication, cela signifie que : (1)  $p \supset q$  est vrai et que (2)  $(q \supset r) \supset (p \supset r)$  est faux

Et maintenant, on réutilise la définition de l'implication avec (2) et on obtient que : (3)  $q \supset r$  est vrai et que (4)  $p \supset r$  est faux

Et donc toujours en utilisant la définition du "implique", on a : (5)  $p$  est vraie et que (6)  $r$  est fausse

Et donc à présent si on reprend "(3)  $q \supset r$  est vrai" et "(6)  $r$  est fausse" on a forcément que "(7)  $q$  est fausse" car dans une implication, si le membre de droite est faux mais que l'implication entière est vraie, cela signifie que le membre de gauche est faux également, par définition de l'implication.

Et enfin, si on reprend "(7)  $q$  est fausse" et "(1)  $p \supset q$  est vrai", de la même manière que précédemment, par définition de l'implication, on obtient : "(8)  $p$  est fausse".

Il suffit donc de remarquer que "(5)  $p$  est vraie" et "(8)  $p$  est fausse" sont des faits contradictoires car une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse.

Et donc, par l'absurde, on peut affirmer que  $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$  est une tautologie.

## 3.2 Raisonnement par déduction

Le raisonnement par déduction est une méthode de logique qui part d'un énoncé vrai (soit parce que c'est une tautologie, soit parce qu'on le suppose comme tel) et qui permet de passer à d'autres énoncés différents qui seront nécessairement vrais en vertu du raisonnement appliqué. Pour passer d'un énoncé à un autre, on utilise les règles d'inférence ou les axiomes précédemment décrits dans cette partie. En effet, ces lois qui reposent principalement sur des " $A \supset B$ " ou des " $A \subset\supset B$ ", où  $A$  et  $B$  sont des propositions impliquent que l'on peut remplacer  $A$  par  $B$  dans notre raisonnement, en passant d'une ligne à la suivante (et  $B$  par  $A$  dans les cas de  $\subset\supset$ ). Autrement dit, ce sont des lois de réécriture des énoncés. Bien sûr, si l'on arrive à démontrer par déduction qu'un énoncé est vrai, celui-ci ne l'est que dans le cas où l'énoncé de base est vrai également. On peut ainsi dire qu'un énoncé est prouvable ou non.

**Exemple 14.** On va montrer que  $A \vee \neg A$  est prouvable.

Tout d'abord montrons que  $A \supset A$  est prouvable :

Avec l'axiome a), on a  $\vdash (A \supset (A \supset A))$  (\*)

Ainsi que  $\vdash (A \supset ((A \supset A) \supset A))$  (\*\*)

Ensuite, avec l'axiome b), on a  $\vdash ((A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)))$  (\*\*\*)

A partir de (\*\*), (\*\*\*) et avec le modus ponens, on peut dire que  $\vdash ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$

A partir de ceci et de (\*), le modus ponens permet de dire que :  $\vdash (A \supset A)$

A présent, utilisons ce résultat avec  $\neg A$  ; on obtient :

$\vdash \neg A \supset \neg A$

A partir de là et en utilisant la règle d'inférence (i), on obtient :

$\vdash A \vee \neg A$

## 4 Troisième partie : le Théorème de complétude

### 4.1 Fondations

Avant d'énoncer le théorème de Complétude, il est nécessaire de définir les axiomes et règles d'inférences suivants :

**Axiômes.** Soit  $A, B, C$  trois propositions quelconques.

- 1)  $\neg A \vee A$  (le tiers exclu)
- 2)  $\neg\neg A \supset A$
- 3)  $\neg A \supset \neg(A \wedge B)$
- 4)  $A \supset (B \supset A)$
- 5)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
- 6)  $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$
- 7)  $(A \wedge B) \supset A$  (l'affaiblissement)

**Règles d'inférence.** Soit  $A, B, C$  trois propositions quelconques. Dans une nouvelle proposition quelconque, on peut procéder aux changements suivants :

- 1)  $A \wedge B \leftrightarrow \neg(A \supset \neg B)$  (le definitionally equivalent)
- 2)  $A \vee B \leftrightarrow \neg A \supset B$  (le definitionally equivalent)
- 3)  $A \supset B \leftrightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$  (le definitionally equivalent)
- 4)  $A \wedge (A \supset B) \rightarrow B$  (le modus ponens)
- 5)  $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \rightarrow (A \supset (B \wedge C))$
- 6)  $(A \supset B) \vee (C \supset B) \rightarrow A \vee B \supset C$  (la disjonction des hypothèses)
- 7)  $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$  (le théorème de Morgan)
- 8)  $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$  (la commutativité du "ET")
- 9)  $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$  (la commutativité du "OU")
- 10)  $A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$  (l'associativité du "OU")
- 11)  $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  (la distributivité du "ET" par le "OU")
- 12)  $(A \supset B) \wedge (B \supset C) \supset (A \supset C)$  (la transitivité de l'implication)

**Remarque 15.** On remarque, bien sûr, que ce nouveau système d'axiomes et de règles d'inférence est différent de celui présenté précédemment (partie 2). En fait, en théorie, le premier système donne le minimum nécessaire à la démonstration de toute autre tautologie, y compris les ajouts que l'on vient de faire. Mais la démonstration de tout ce qui est ici ajouté aurait pris trop de temps et de place. Néanmoins, ces ajouts sont indispensables à la démonstration du théorème de complétude qui va suivre.

## 4.2 Théorème et Démonstration

**Théorème 16.** *Théorème de Complétude :*

*Dans ce système d'axiomes et de règles d'inférence, toute proposition  $P$  est prouvable si et seulement si  $P$  est une tautologie.*

*Autrement dit,*

$\vdash P$  si et seulement si  $\models P$

### 4.2.1 Sens direct

On va d'abord démontrer le sens direct : si  $\vdash P$ , alors  $\models P$ .

*Démonstration.* Pour ce faire on va faire une démonstration par récurrence sur le nombre  $m$  de propositions qui composent un énoncé  $P$  ou  $Q$ .

On commence par l'initialisation ; celle-ci consistera à vérifier la véracité de nos axiomes car ce sont eux la base de nos raisonnements par déduction. On va donc montrer que ces axiomes sont des tautologies, en utilisant les tables de vérités.

On a exactement 6 axiomes, il est inutile de tous les démontrer ici, il suffit d'exposer la démonstration du plus complexe, sachant que les autres se démontrent de manière analogue, en plus simple.

On va s'intéresser à l'axiome (\*) :  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

$A$	$B$	$C$	$B \supset C$	$A \supset (B \supset C)$	$A \supset B$	$A \supset C$	$(A \supset B) \supset (A \supset C)$	Axiôme(*)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

On remarque que la dernière colonne est remplie de vrai, cela montre bien que notre axiome peut bien jouer son rôle de base à tout raisonnement par déduction car il est toujours vrai.

Hérédité : Celle-ci va principalement consister à montrer que si l'on a un énoncé que l'on supposera être une tautologie (en faisant une hypothèse de récurrence sur les propositions atomiques qui le composent), le résultat obtenu à la suite de l'utilisation d'une règle d'inférence (après un changement d'étape du raisonnement par déduction) reste une tautologie. Dans un souci de légèreté de ce cours, on ne va démontrer cela que pour les 4 premières règles sachant que

théoriquement les autres règles ajoutées découlent de celles-ci.

I) Pour le definitionally equivalent, pour le OU :

$A$	$B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg A \supset B$
$V$	$V$	$V$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$F$

Donc si on a  $\models A \vee B$  qui est une tautologie, c'est à dire que notre hypothèse de récurrence nous fait supposer que les propositions atomiques qui composent A et B font qu'elles ne peuvent être fausses ensemble, alors on a bien  $\models \neg A \supset B$  qui est une tautologie et vice versa pour le sens indirect.

II) Pour le definitionally equivalent, pour le ET :

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\neg B$	$A \supset \neg B$	$\neg(A \supset \neg B)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$F$

Donc si on a  $\models A \wedge B$  qui est une tautologie c'est à dire que notre hypothèse de récurrence nous fait supposer que les propositions atomiques qui composent A et B font qu'elle ne peuvent être que vraies ensemble, alors on a bien  $\models \neg(A \supset \neg B)$  qui est une tautologie et vice versa pour le sens indirect.

III) Pour le definitionally equivalent, pour le EQUIVALENT :

$A$	$B$	$A \subset\supset B$	$A \supset B$	$B \supset A$	$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

Donc si on a  $\models A \subset\supset B$  qui est une tautologie c'est à dire que notre hypothèse de récurrence nous fait supposer que les propositions atomiques qui composent A et B font qu'elle ne peuvent être que vraie ou fausse ensemble, alors on a bien  $\models (A \supset B) \wedge (B \supset A)$  qui est une tautologie et vice versa pour le sens indirect.

IV) Pour le modus ponens :

$P$	$Q$	$P \supset Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

Mais les deux dernières lignes ne sont pas prises en compte puisque  $P$  est faux donc pas tautologie et la deuxième ligne non plus car  $P$  implique  $Q$  est fausse donc pas une tautologie.

Il reste donc que  $Q$  est une tautologie.

#### 4.2.2 Préliminaires au sens indirect

**Lemme 17.** *Toute proposition non atomique  $P$  peut s'écrire sous la forme d'une négation d'un autre énoncé, ou bien de la conjonction de deux autres énoncés. C'est-à-dire qu'il existe des énoncés  $Q, R, S$  tel que soit  $P \leftrightarrow \neg Q$  soit  $P \leftrightarrow S \wedge R$ .*

*Démonstration.* Les seuls autres possibilités de sous-composition de l'énoncé  $P$  résident dans le OU ( $\vee$ ) et dans le IMPLIQUE ( $\supset$ ). Il nous suffit d'utiliser le Definitionally Equivalent et la transitivité de l'implication :

$$\begin{aligned}
 & A \vee B \\
 & \leftrightarrow \neg A \supset B \\
 & \leftrightarrow \neg \neg(\neg A \supset B) \\
 & \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
 & \text{D'autre part,} \\
 & A \supset B \\
 & \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)
 \end{aligned}$$

**Définition 18.** Soit  $P$  un énoncé, et  $\mathcal{M}$  un modèle. Notons  $h(\mathcal{M})$  la conjonction de toutes les formules atomiques  $P_n$  telle que  $P_n$  est vrai dans  $\mathcal{M}$  et de toutes les négations des formules atomiques  $P_n$  telles que  $P_n$  est fausse dans  $\mathcal{M}$ .

**Définition 19.** On appelle complexité d'une proposition, dans la logique mathématique, le nombre d'opérateurs maximal emboîtés les uns dans les autres à l'intérieur d'un énoncé.

Si une proposition  $P$  a une complexité de 0, alors c'est une proposition atomique.

**Exemple 20.** Par exemple dans  $(\neg p) \vee (q \wedge r)$ , le OU et le NON sont emboîtés l'un dans l'autre. Mais le NON et le ET ne le sont pas. Cette proposition est de complexité 2 parce qu'elle a au maximum deux opérateurs emboîtés.

**Lemme 21.** Si  $P$  est vraie dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset P$   
Si  $P$  est fausse dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg P$

*Démonstration.* Par récurrence sur la complexité.

Initialisation : soit  $p_1$  une proposition de complexité nulle, c'est-à-dire une proposition atomique. On a  $\vdash p_1 \supset p_1$  comme nous l'avons démontré précédemment (exemple page 12), mais on a également  $\vdash H \supset p_1$  où  $H$  est une proposition dont l'une des propositions atomiques qui la compose est  $p_1$  (sans négation bien sûr). Ceci repose d'abord sur l'utilisation de la règle d'inférence : Commutativité du "ET" qui nous permet d'écrire  $H \leftrightarrow p_1 \wedge H'$  où  $H'$  est l'énoncé  $H$  privée de  $p_1$  puis sur l'axiome de l'affaiblissement qui nous permet de dire qu'on a  $p_1$ . Et donc si  $p_1$  est vraie dans le modèle  $\mathcal{M}$ , cela implique que  $p_1$  compose  $h(\mathcal{M})$ . Finalement on a bien  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset p_1$ . La propriété est vraie au premier rang. L'initialisation de la deuxième partie du lemme se fait de la même manière.

Hérédité : Supposons que notre lemme soit vrai pour toutes les propositions de complexité au plus égale à  $n$ . Soit  $P$  une proposition de complexité  $n + 1$ . D'après le lemme précédent, on sait qu'il n'y a que deux cas possibles : soit il existe une proposition  $Q$  de complexité  $n$  tel que  $P \leftrightarrow \neg Q$ , soit il existe deux propositions  $R$  et  $S$  de complexité inférieure ou égale à  $n$  tel que  $P \leftrightarrow R \wedge S$ .

Premier cas :  $P \leftrightarrow \neg Q$ . Si  $P$  est vraie dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors  $Q$  est fausse dans  $\mathcal{M}$ . Comme  $Q$  est de complexité  $n$ , l'hypothèse de récurrence donne,  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg Q$  et donc que  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset P$ . La propriété est donc démontrée pour  $P$  dans ce cas. Si  $P$  est fausse dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors  $Q$  est vraie dans  $\mathcal{M}$ . On a donc  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset Q$ . Par ailleurs, on sait que  $\vdash Q \supset \neg\neg Q$  (c'est donné par l'axiome 2). On peut alors déduire, avec la règle d'inférence de la transitivité de l'implication, que  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg\neg Q$  et donc que  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg P$ . Le deuxième lemme est donc démontré pour  $P$  dans ce cas.

Deuxième cas :  $P \leftrightarrow R \wedge S$ . Si  $P$  est vraie dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors  $R$  et  $S$  sont toutes les deux vraies dans  $\mathcal{M}$ . Or, par définition on aura la complexité de  $R$  et de  $S$  qui seront nécessairement inférieure ou égale à  $n$ . On a alors, par hypothèse de récurrence,  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset R$  et  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset S$ . On en déduit que  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset R \wedge S$



(d'après la règle d'inférence 5) ), et donc que  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset P$ . La propriété est donc démontrée pour  $P$  dans ce cas. Si  $P$  est fausse dans le modèle  $\mathcal{M}$  alors l'une au moins de  $R$  ou de  $S$  est fausse dans  $\mathcal{M}$ . Supposons que ce soit  $R$ . On a alors  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg R$ . Or, de  $\neg R$ , on peut déduire  $\neg(R \wedge S)$  (d'après l'axiome 3) ). On a donc, par application de la règle d'inférence de la transitivité de l'implication,  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset \neg(R \wedge S)$  soit  $\vdash h(\mathcal{M}) \supset P$ . Le deuxième lemme est donc démontré pour  $P$  dans ce cas.

Le lemme est donc vrai au rang 0 de complexité (pour des propositions atomiques) et est héréditaire d'un rang de complexité à l'autre. On peut donc dire, par récurrence, qu'il est vrai pour toute proposition, quelque soit sa complexité.

Nous pouvons maintenant démontrer le sens indirect du Théorème de Complétude.

### 4.2.3 Sens indirect

Démontrons maintenant le sens indirect : si  $\models P$ , alors,  $\vdash P$ .

*Démonstration.* On va commencer par montrer qu'on peut se restreindre aux modèles finis. En effet, si on prend un ensemble infini dénombrable de propositions atomiques, toutes distinctes,  $p_1, p_2, p_3 \dots$ . On se place dans un modèle initial de longueur  $n$  qui contient  $p_i = V$  ou bien  $p_i = F$ , mais pas les deux, pour  $i$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus, vu qu'une proposition  $P$  ne contient forcément qu'un nombre limité de propositions atomiques, notons donc  $n$  le nombre de propositions atomiques que contient  $P$ . Si  $P$  est vraie dans tous les modèles initiaux de longueur  $n$ , alors elle est vraie dans tous les modèles où sa vérité est définie, puisque les propositions  $p_m$  n'interviennent pas dans  $P$  pour  $m > n$ .

Prouvons maintenant notre théorème par récurrence sur la longueur des modèles. On introduit la propriété  $I_n$  : "toute proposition  $P$  vraie dans tous les modèles de longueur  $n$  est dérivable" pour tout  $n$  entier naturel.

Initialisation : On s'intéresse à  $I_1$ . Supposons que  $P$  est vraie dans tous les modèles de longueur 1, c'est-à-dire les deux modèles  $p_1$  est vrai et  $p_1$  est faux. On a alors, d'après le lemme précédent  $\vdash p_1 \supset P$  et  $\vdash \neg p_1 \supset P$ . Par la règle de disjonction des hypothèses, on en déduit que  $\vdash (p_1 \vee \neg p_1) \supset P$  mais  $p_1 \vee \neg p_1$  est elle-même un axiome (tiers-exclu). Et donc avec le modus ponens, on a  $\vdash (p_1 \vee \neg p_1)$  et  $\vdash (p_1 \vee \neg p_1) \supset P$  ce qui implique  $\vdash P$ .

Hérédité : Supposons que  $I_n$  soit vrai. Soit  $P$  une proposition vraie dans tous les modèles de longueur  $n + 1$ . Soit  $\mathcal{M}$  un modèle de longueur  $n$ .  $P$  est vraie dans le modèle  $(\mathcal{M}, p_{n+1} = V)$  et dans le modèle  $(\mathcal{M}, p_{n+1} = F)$  où  $p_{n+1}$  est une proposition atomique quelconque. D'après le lemme précédent, on a alors  $\vdash (h(\mathcal{M}) \wedge p_{n+1}) \supset P$  et  $\vdash (h(\mathcal{M}) \wedge \neg p_{n+1}) \supset P$  Donc d'après l'axiome de disjonction des hypothèses, on a :

$$\begin{aligned} &\rightarrow (h(\mathcal{M}) \wedge p_{n+1}) \vee (h(\mathcal{M}) \wedge \neg p_{n+1}) \supset P \\ &\rightarrow (h(\mathcal{M}) \wedge (p_{n+1} \vee \neg p_{n+1})) \supset P \text{ (par distributivité du "OU" par le "ET")} \end{aligned}$$

$\rightarrow \neg(h(\mathcal{M}) \wedge (p_{n+1} \vee \neg p_{n+1})) \vee P$  (definitionally equivalent)  
 $\rightarrow \neg(h(\mathcal{M}) \vee \neg(p_{n+1} \vee \neg p_{n+1})) \vee P$  (théorème de De Morgan)  
 $\rightarrow \neg(p_{n+1} \vee \neg p_{n+1}) \vee \neg(h(\mathcal{M}) \vee P)$  (commutativité, associativité du "OU")  
 $\rightarrow (p_{n+1} \vee \neg p_{n+1}) \supset \neg(h(\mathcal{M}) \vee P)$  (definitionally equivalent)  
 $\rightarrow \neg(h(\mathcal{M}) \vee P)$  (avec le modus ponens et le principe du tiers exclu)  
 $\rightarrow h(\mathcal{M}) \supset P$  (definitionally equivalent)

Comme  $\mathcal{M}$  un modèle quelconque de longueur  $n$ , on peut dire que, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1; 2^n \rrbracket$  on a  $\vdash h(\mathcal{M}_i) \supset P$ . Ensuite, d'après la règle d'inférence sur la disjonction des hypothèses, on a  $h(\mathcal{M}_1) \vee \dots \vee h(\mathcal{M}_{2^n}) \supset P$ . De plus, on remarque que  $h(\mathcal{M}_1) \vee \dots \vee h(\mathcal{M}_{2^n})$  est une tautologie dans tout modèle de longueur  $n$  (car cela regroupe toutes les possibilités de valeurs de vérité que peuvent prendre les propositions atomiques). Ainsi  $h(\mathcal{M}_1) \vee \dots \vee h(\mathcal{M}_{2^n})$  est vraie dans tout modèle de longueur  $n$  par définition d'une tautologie, et donc d'après l'hypothèse de récurrence  $I_n$ , on a  $\vdash h(\mathcal{M}_1) \vee \dots \vee h(\mathcal{M}_{2^n})$ . Enfin, avec la relation précédente  $h(\mathcal{M}_1) \vee \dots \vee h(\mathcal{M}_{2^n}) \supset P$  et le modus ponens, on peut conclure qu'on a  $\vdash P$ .  $I_{n+1}$  est donc vérifiée.

La propriété  $I_n$  est vrai au premier rang de longueur des modèles (un modèle qui ne comprend qu'une seule proposition atomique), et est héréditaire. On peut en conclure que si une proposition  $P$  est vraie alors  $P$  est dérivable, quelque soit le modèle utilisé.

On a donc bien démontré le sens direct et le sens indirect du théorème de Complétude. On peut en conclure qu'on a bien :

$\vdash P$  si et seulement si  $\models P$

## 5 Bibliographie

Sources littéraires :

- "Elements de logique formelle" par Gérard Chazal, édition Hermes
- "Mathematical logic and formalized theories" par Robert L.Rogers, 1974

Sources numérique :

- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_compl%C3%A9tude\\_%28calcul\\_des\\_propositions%29](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude_%28calcul_des_propositions%29)
- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me\\_de\\_compl%C3%A9tude\\_de\\_G%C3%B6del](https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_compl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del)
- [https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89%C3%A9ments\\_d'Euclide](https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89%C3%A9ments_d'Euclide)
- <http://detexify.kirelabs.org/classify.html>