PERMUTATIONS ET CROISEMENTS DE FONCTIONS POLYNOMIALES

Romain TABARD

May 26, 2018

Ce travail de recherche s'appuie sur le premier chapitre de " A Singular Mathematical Promenade " ouvrage écrit par Étienne Ghys. Le fait de vous rendre à l'adresse indiquée en annexe et de lire la première page de la préface du document vous permettra de rapidement comprendre de quoi il est question. Mon travail à consisté à éclaircir certains points de démonstration pourtant non triviaux sur lesquels l'auteur ne s'attarde pas et lorsque cela est possible de donner des exemples illustrant les propos de l'auteur. J'ai également exploré certaines pistes de recherche intéressantes dont il n'est pas fait mention dans le document.

1 Théorème de Kontsevitch

Il s'agit dans cette partie de formaliser le résultat donné dans la préface et de le démontrer. Nous allons de plus définir une notation qui sera utilisée dans les deux premières parties : la valuation d'un polynôme P est le plus petit entier k tel que $\alpha_k \neq 0$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ où $n = deg(P)$

Dans toute la suite, on supposera que les polynômes considérés s'annulent en 0.

1.1 Énoncé du Théorème

Il est impossible de trouver quatre polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 tels que :

1. $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$ au voisinage de 0, $x < 0$

2. $P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$ au voisinage de 0, $x > 0$

1.2 Preuve du Théorème

1.2.1 Lemme préliminaire

Commençons par prouver le résultat suivant :

$|P(x)| > |Q(x)| \Rightarrow v(Q) \geq v(p)$

On a :

$|P(x)| = |c| x^{v(P)} + o\left(x^{v(P)}\right)$

$|Q(x)| = |d| x^{v(Q)} + o\left(x^{v(Q)}\right)$

On va raisonner par contraposée

Si $v(Q) < v(p)$ alors :

$|P(x)| = o\left(x^{v(Q)}\right)$

$|Q(x)| = |d| x^{v(Q)} + o\left(x^{v(Q)}\right)$

On en déduit :

$Q(x) \geq P(x)$

Conclusion : Le lemme est démontré.

1.2.2 Preuve du théorème

Nous sommes désormais armés pour prouver le théorème de Kontsevitch.

On va raisonner par l'absurde :

Supposons qu'il existe quatre polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 vérifiant les deux inégalités strictes données dans l'énoncé du théorème :

1. $P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
2. $P_2(x) < P_4(x) < P_3(x) < P_1(x)$

En remplaçant P_i par $P_i - P_1$, on peut supposer sans pertes de généralités que $P_1 = 0$

P_2 et P_4 changent de signe en 0, leur valuations sont donc impaires.

P_3 ne change pas de signe en 0, sa valuation est donc paire.

D'après le lemme préliminaire, on peut en déduire :

De la première inégalité on tire : $v(P_3) \geq v(P_4)$

De la seconde inégalité on tire : $v(P_4) \geq v(P_3)$

Conclusion : Cela force les 2 valuations à être égales or l'une est paire et l'autre est impaire.

Contradiction

2 Lien entre n et degré minimal des polynômes réalisant les permutations

2.1 Les cas évidents n = 1 et n = 2

Dans toute cette partie nous utiliserons la notation suivante : (c a b) est la permutation qui à a associe c, qui à b associe a et qui a b associe c.

Je me suis intéressé aux degré minimal des polynômes réalisant les permutations pour n fixé.

Pour n = 1 :

Le polynôme nul correspond à la permutation identité.

Pour n = 2

Pour $\sigma_1 = (12)$:

$P_1(x) = -x^2$,
$P_2(x) = x^2$

Pour $\sigma_2 = (21)$: :

$P_1(x) = x$
$P_2(x) = -x$

Pour n = 1, on peut estimer qu'il s'agit d'un cas particulier. Pour n = 2, le degré 2 est suffisant, voyons si cette observation se généralise aux entiers n supérieurs.

2.2 La nécessité du degré 3 pour n = 3

Essayons de formaliser cette observation puis de la démontrer

2.2.1 Énoncé du Théorème

Il existe une permutation de taille 3 telle que les polynômes la réalisant ne peuvent tous être de degré strictement inférieur à 3.

2.2.2 Preuve du Théorème

Considérons la permutation (1 3 2) :

On va supposer dans un premier temps que $P_1 = 0$

P_2 ne change pas de signe en 0 donc $v\left(P_2\right)$ est paire.

P_3 ne change pas de signe en 0 donc $v\left(P_3\right)$ est paire.

$P_2 - P_3$ change de signe en 0 donc $v\left(P_2 - P_3\right)$ est impaire.

$v\left(P_2 - P_3\right) \neq 1$ car P_2 et P_3 s'annulent en 0.

On en déduit $v\left(P_2 - P_3\right) \geq 3$

Cela prouve qu'au moins des polynômes P_2 et $P3$ est de degré supérieur ou égal à 3.

N'oublions cependant pas qu'on a supposé $P_1 = 0$, on va montrer dans le cas général que l'on peut toujours s'y ramener.

En effet, il suffit de poser comme pour le théorème de Kontsevitch $P_i = P_i - P_1$

On a alors :

$P_2\left(x\right) > P_1\left(x\right)$ donc $v\left(P_2 - P_1\right)$ est paire.

$P_3\left(x\right) > P_1\left(x\right)$ donc $v\left(P_3 - P_1\right)$ est paire.

$v\left(P_2 - P_1 - \left(P_3 - P_1\right)\right) = v\left(P_2 - P_3\right)$ et on constate que l'on est ramené au cas précédent.

2.3 L'étude du cas n = 4

L'auteur suggère au lecteur en guise d'exercice de trouver un exemple de quadruplet de polynômes pour chacune des 22 permutations les voici :

2.3.1 Les 22 exemples détaillés

1. Pour $\sigma = (1234)$:

$$P_1 = -2x^2; P_2 = -x^2; P_3 = x^2; P_4 = 2x^2$$

2. Pour $\sigma = (2134)$:
$P_1 = -x^2 + x^3; P_2 = -x^2 - x^3; P_3 = x^2; P_4 = 2x^2$

3. Pour $\sigma = (3214)$:
$P_1 = x^3; P_2 = 0; P_3 = -x^3; P_4 = x^2$

4. Pour $\sigma = (4231)$:
$P_1 = x; P_2 = -x^2; P_3 = x^2; P_4 = -x$

5. Pour $\sigma = (1432)$:
$P_1 = -x^2; P_2 = x^3; P_3 = 0; P_4 = -x^3$

6. Pour $\sigma = (1243)$:
$P_1 = -x^2; P_2 = 0; P_3 = x^2 + x^3; P_4 = x^2 - x^3$

7. Pour $\sigma = (2143)$:
$P_1 = -x^2 + x^3; P_2 = -x^2 - x^3; P_3 = x^2 + x^3; P_4 = x^2 - x^3$

8 . Pour $\sigma = (3241)$:
$P_1 = x; P_2 = 0; P_3 = -x^3; P_4 = x^2 - x^3$

9. Pour $\sigma = (4213)$:
$P_1 = x^3; P_2 = 0; P_3 = x^2 + x^3; P_4 = -x$

10. Pour $\sigma = (1423)$:
$P_1 = -x^2 - x^3; P_2 = -x^4; P_3 = x^4; P_4 = -x^3$

11. Pour $\sigma = (1324)$:
$P_1 = -x^2; P_2 = x^3; P_3 = -x^3; P_4 = x^2$

12. Pour $\sigma = (3124)$:
$P_2 = x^3; P_2 = -x^4; P_3 = x^4; P_4 = x^2 + x^3$

13. Pour $\sigma = (3124)$:
$P_1 = -x^4; P_2 = x^4; P_3 = -x^3; P_4 = x^2 - x^3$

14. Pour $\sigma = (4321)$:
$P_1 = 2x; P_2 = x; P_3 = -x; P_4 = -2x$

15. Pour $\sigma = (1342)$:
$P_1 = -x^2 + x^3; P_2 = x^3; P_3 = -x^4; P_4 = x^4$

16. Pour $\sigma = (4132)$:
$P_1 = 0; P_2 = x^2 + x^3; P_3 = x^2 - x^3; P_4 = -x$

17. Pour $\sigma = (4123)$:
$P_1 = -x^4; P_2 = 0; P_3 = x^4; P_4 = -x^3$

18. Pour $\sigma = (4312)$:
$P_1 = -x^4; P_2 = x^4; P_3 = x^3; P_4 = 2x^3$

19. Pour $\sigma = (2431)$:
$P_1 = x; P_2 = -x^2 - x^3; P_3 = 0; P_4 = -x^3$

20. Pour $\sigma = (3412)$:
$P_1 = -x^2; P_2 = x^2; P_3 = x^2 + x; P_4 = x^3 - x$

21. Pour $\sigma = (3421)$:
$P_1 = x^3; P_2 = -x^3; P_3 = x^3 + x; P_4 = x^3 - x$

22. Pour $\sigma = (2341)$:
$P_1 = x; P_2 = -x^2; P_3 = 0; P_4 = x^2$

2.3.2 La nécessité de recourir au degré 4

La recherche des 22 exemples précédents prouve que le degré 4 est suffisant, en aucun cas que celui-ci est nécessaire, il s'agit donc comme pour n = 3 de démontrer la nécessité de recourir au degré 4.

3 Autres pistes de recherches n'ayant que partiellement abouties

3.1 Une conjecture intéressante

Je me suis intéressé au lien entre les polynômes réalisant une permutation donnée et ceux réalisant une permutation obtenue comme étant l'inverse ou la renversée de la première.

Exemple : La renversée de (1 2 ... n) est (n n-1 ... 1) que l'on notera s comme étant la renversée de l'identité pour n quelconque.

Est-il possible d'établir une formule générale qui à partir des polynômes réalisant une certaine permutation permet d'obtenir ceux réalisant l'inverse ou la renversée ?

Conjecture :

$P_1 < P_2 < ... < P_n$ au voisinage de 0, dans les négatifs

$P_{\sigma_1} < P_{\sigma_2} < ... < P_{\sigma_n}$ au voisinage de 0, dans les positifs

Si on pose pour tout entier i appartenant à [1 , n] :

$Q_i = -P_{n+1-i}$

On a alors :

1. $Q_1 < Q_2 < ... < Q_n$ au voisinage de 0 dans les négatifs

2. $Q_{s \circ \sigma o s(1)} < Q_{s \circ \sigma o s(2)} < ... < Q_{s \circ \sigma o s(n)}$ au voisinage de 0 dans les positifs

Ce résultat n'est qu'une conjecture, on peut le vérifier dans des cas simples commme $\sigma = Id$ le démontrer permettrait de faciliter la recherche d'exemple et donnerait entre autres une preuve compacte de l'existence des 22 croisements pour n = 4.

3.2 Qu'observe - t - on quand on augmente le nombre de croisements ?

Jusqu'à présent, nous avons uniquement considéré des polynômes se croisant une fois en l'origine, mais que se passe-t-il si l'on s'autorise plusieurs croisements ? Cela nous permet-il d'obtenir n'importe quelle permutation ?

Pour un nombre de croisements quelconques on se convainc assez facilement que l'on peut obtenir n'importe quelle permutation. Graphiquement, il suffit d'écrire la permutation puis de relier chaque nombre identique par un segment de droite.

La méthode de construction décrite ci-dessus permet alors d'obtenir les deux permutations interdites par le théorème de Kontsevitch et ce avec 3 croisements. Cette méthode de reliage point par point fait uniquement appel à des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On peut alors se demander si on peut les obtenir avec 2 croisements en ayant recours à des polynômes de degré supérieur.

Le but ultime est d'établir une relation entre n et le nombre minimal de croisements réalisant une permutation de taille n.

4 Annexe

4.1 Bibliographie

http://ghys.perso.math.cnrs.fr/bricabrac/promenade.pdf

4.2 Remerciements

Michaël Bulois, maître de conférence à l'Université Jean Monnet et encadrant de ce travail d'étude et de recherche