Étude de quelques variétés des algèbres de Lie symétriques réductives

MICHAËL BULOIS
sous la direction de
THIERRY LEVASSEUR

Laboratoire de Mathématiques UMR 6205 (CNRS)
Université de Bretagne Occidentale, Brest
ED SICMA

Plan

Notations
Algèbre

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie complexe réductive de dimension finie.

G : groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie complexe réductive de dimension finie.

G : groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{N}(A)$: ensemble des éléments d'une partie $A \subset \mathfrak{g}$ qui sont nilpotents dans $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g}$: algèbre de Lie complexe réductive de dimension finie.

G : groupe adjoint de $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{N}(A)$: ensemble des éléments d'une partie $A \subset \mathfrak{g}$ qui sont nilpotents dans $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(A) = \{x \in \mathfrak{l} \mid [x, A] = 0\} = \mathfrak{l}^A$ pour deux parties $\mathfrak{l}, A \subset \mathfrak{g}$.

$G^A = \{g \in G \mid g.a = a, \forall a \in A\}$: Centralisateur dans G de $A \subset \mathfrak{g}$.

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

Notations
Algèbre

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

Exemple : Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$,

Notations
Algèbre

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

AI : $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{so}_n)$ et $\mathfrak{p} = \{\text{symétriques}\}$

Exemple : Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$,

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

Exemple : Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$,
- AI : $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{so}_n)$ et $\mathfrak{p} = \{$symétriques$\}$
- AII : $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sp}_n)$

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

Exemple : Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$,

AI : $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{so}_n)$ et $\mathfrak{p} = \{\text{symétriques}\}$

AII : $(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{sp}_n)$

AIII : $(\mathfrak{gl}_{p+q}, \mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q)$

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

K : sous-groupe (réductif) connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

θ : Involution de $\mathfrak{g}$.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$: décomposition de $\mathfrak{g}$ en θ-espaces propres.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ou $(\mathfrak{g}, \theta)$: algèbre de Lie symétrique

K : sous-groupe (réductif) connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

$\mathrm{rk}_{sym}^{ss}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{a} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$: rang symétrique semi-simple de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, où $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$.

Si V est une variété algébrique, la fermeture d'un sous ensemble $U \subset V$ est notée $\overline{U}$.

Notations
Géométrie

Si V est une variété algébrique, la fermeture d'un sous ensemble $U \subset V$ est notée $\overline{U}$.

Si H est un groupe algébrique agissant rationnellement sur V et $m \in N$,

$$V^{(m)} := \{x \in V \mid \dim H.x = m\}.$$

Notations

Géométrie

Si V est une variété algébrique, la fermeture d'un sous ensemble $U \subset V$ est notée $\overline{U}$.

Si H est un groupe algébrique agissant rationnellement sur V et $m \in N$,

$$V^{(m)} := \{x \in V \mid \dim H.x = m\}.$$

Si $U \subset V$, $U^\bullet$ désigne l'ensemble des éléments **réguliers** de U,

$$U^\bullet := \{x \in U \mid \dim H.x \text{ est maximale dans } U\}.$$

Si V est une variété algébrique, la fermeture d'un sous ensemble $U \subset V$ est notée $\overline{U}$.

Si H est un groupe algébrique agissant rationnellement sur V et $m \in N$,

$$V^{(m)} := \{x \in V \mid \dim H.x = m\}.$$

Si $U \subset V$, $U^\bullet$ désigne l'ensemble des éléments **réguliers** de U,

$$U^\bullet := \{x \in U \mid \dim H.x \text{ est maximale dans } U\}.$$

Si V admet un **quotient géométrique** par H, on le note V/H.

Etude de deux familles de variétés :

- **Variété Commutante** :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$$

Etude de deux familles de variétés :

- **Variété Commutante** :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$$

Variété fermée
G-variété pour l'action diagonale de G sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

Etude de deux familles de variétés :

- **Variété Commutante** :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$$

Variété fermée
G-variété pour l'action diagonale de G sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

- **Nappes** : Composantes irréductibles de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Etude de deux familles de variétés :

- **Variété Commutante** :

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}$$

Variété fermée
G-variété pour l'action diagonale de G sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$.

- **Nappes** : Composantes irréductibles de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Variétés localement fermées et G-stables

Lien entre les deux notions

Plan

Étude de l'irréductibilité de

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}.$$

Étude de l'irréductibilité de

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \{(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}.$$

Théorème (Richardson 1979)

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on a

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{g}) = \overline{G.(\mathfrak{h} \times \mathfrak{h})}.$$

En particulier, $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$ est **irréductible** *de dimension* $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{h}$.

Variété commutante

Historique

Étude de l'irréductibilité de la **variété commutante symétrique**

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) := \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \mid [x, y] = 0\}.$$

Étude de l'irréductibilité de la **variété commutante symétrique**

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) := \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \mid [x, y] = 0\}.$$

Travaux de Panyushev, Panyushev-Yakimova, Sabourin-Yu entre 1994 et 2007

Résultats obtenus

Si $\mathfrak{a}$ *est un sous-espace de Cartan de* $\mathfrak{p}$ *alors* $\mathfrak{C}_0 = \overline{K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})}$ *est une* **composante irréductible** *de dimension maximale de* $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ *et* $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ *est de dimension* $\dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{a}$.

Étude de l'irréductibilité de la **variété commutante symétrique**

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) := \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \mid [x, y] = 0\}.$$

Travaux de Panyushev, Panyushev-Yakimova, Sabourin-Yu entre 1994 et 2007

Résultats obtenus

Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ alors $\mathfrak{C}_0 = \overline{K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})}$ est une **composante irréductible** *de dimension maximale de $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ et $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ est de dimension $\dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{a}$.*
De plus, on sait précisément lorsque $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, **sauf** *dans les trois cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ suivants :*

Étude de l'irréductibilité de la **variété commutante symétrique**

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{p}) := \{(x, y) \in \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \mid [x, y] = 0\}.$$

Travaux de Panyushev, Panyushev-Yakimova, Sabourin-Yu entre 1994 et 2007

Résultats obtenus

Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$ alors $\mathfrak{C}_0 = \overline{K.(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})}$ est une **composante irréductible** *de dimension maximale de $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ et $\mathfrak{C}(\mathfrak{p})$ est de dimension* $\dim \mathfrak{p} + \dim \mathfrak{a}$.
De plus, on sait précisément lorsque $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}(\mathfrak{p})$, **sauf** *dans les trois cas $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ suivants :*

- $(\mathfrak{sp}_{2n+2m}, \mathfrak{sp}_{2n} \oplus \mathfrak{sp}_{2m})$ *(CII)*
- $(\mathfrak{so}_{4n}, \mathfrak{gl}_{2n})$ $\frac{1}{2}$*(DIII)*
- $(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathbb{C})$ *(EVII)*

Composantes irréductibles de la **variété commutante nilpotente** ?

$$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid [x, y] = 0\}$$

Composantes irréductibles de la **variété commutante nilpotente** ?

$$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}) := \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid [x, y] = 0\}$$

Travail de Baranovsky dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ en 2001.

Composantes irréductibles de la **variété commutante nilpotente** ?

$$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}) := \{(x,y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid [x,y] = 0\}$$

Travail de Baranovsky dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ en 2001.

Théorème (Premet 2003)

La variété $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g})$ *est* **équidimensionnelle** *de dimension* $\dim \mathfrak{g}$.

Composantes irréductibles de la **variété commutante nilpotente** ?

$$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}) := \{(x,y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{g}) \mid [x,y] = 0\}$$

Travail de Baranovsky dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ en 2001.

Théorème (Premet 2003)

La variété $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g})$ *est* **équidimensionnelle** *de dimension* $\dim \mathfrak{g}$.
Ses **composantes irréductibles** *sont les ensembles de la forme*

$$\overline{G.(e, \mathfrak{g}^e)}$$

Pour e distingué (i.e. $\mathfrak{g}^e \subset \mathcal{N}(\mathfrak{g})$*).*

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x,y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x,y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.
$\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) = \bigcup \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)}$

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.
$\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) = \bigcup \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)}$
(e, h, f) : $\mathfrak{sl}_2$-triplet ($[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$)
normal ($e, f \in \mathfrak{p}$, $h \in \mathfrak{k}$).
$\mathfrak{s} = \langle e, h, f \rangle \cong \mathfrak{sl}_2$.

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.
$\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) = \bigcup \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)}$
(e, h, f) : $\mathfrak{sl}_2$-triplet ($[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$)
normal ($e, f \in \mathfrak{p}$, $h \in \mathfrak{k}$).
$\mathfrak{s} = \langle e, h, f\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$.
$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}(i, h)$ où $\mathfrak{p}(i, h) = \{x \in \mathfrak{p} \mid [h, x] = ix\}$: graduation caractéristique.

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.

$\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) = \bigcup \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)}$

(e, h, f) : $\mathfrak{sl}_2$-triplet ($[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$)
normal ($e, f \in \mathfrak{p}$, $h \in \mathfrak{k}$).

$\mathfrak{s} = \langle e, h, f\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$.

$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}(i, h)$ où $\mathfrak{p}(i, h) = \{x \in \mathfrak{p} \mid [h, x] = ix\}$: graduation caractéristique.

$\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^{\mathfrak{s}} \times \bigoplus_{i\geqslant 1} \mathfrak{p}(e, i)$ où $\mathfrak{p}(e, i) = \mathfrak{p}^e \cap \mathfrak{p}(i, h)$.

Étude de la **variété commutante nilpotente symétrique** :

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{p}) &= \mathfrak{C}^{\mathrm{nil}}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \\ &= \{(x, y) \in \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \times \mathcal{N}(\mathfrak{p}) \mid [x, y] = 0\}.\end{aligned}$$

e : élément nilpotent de $\mathfrak{g}$.
$\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) = \bigcup \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)}$
(e, h, f) : $\mathfrak{sl}_2$-triplet ($[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$)
normal ($e, f \in \mathfrak{p}$, $h \in \mathfrak{k}$).
$\mathfrak{s} = \langle e, h, f\rangle \cong \mathfrak{sl}_2$.
$\mathfrak{p} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{p}(i, h)$ où $\mathfrak{p}(i, h) = \{x \in \mathfrak{p} \mid [h, x] = ix\}$: graduation caractéristique.
$\mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^{\mathfrak{s}} \times \bigoplus_{i\geqslant 1} \mathfrak{p}(e, i)$ où $\mathfrak{p}(e, i) = \mathfrak{p}^e \cap \mathfrak{p}(i, h)$.
$\mathfrak{C}(e)^{(j)} := \overline{K.(e, \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e)^{(j)})}$.

Définitions

Le **défaut** de e est

$$\delta(e) := \mathrm{rk}_{sym}^{ss}(\mathfrak{g}^{\mathfrak{s}}, \mathfrak{k}^{\mathfrak{s}}).$$

Lemme

La variété $\mathfrak{C}(e) = G.(e, \mathcal{N}(\mathfrak{p}^e))$ *est* **équidimensionnelle** *de dimension* $\dim \mathfrak{C}(e) = \dim \mathfrak{p} - \delta(e)$.

Lemme

$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ *est* GL_2**-stable**.

Lemme

*$\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ est GL_2-**stable**.*
En particulier ses composantes irréductibles sont GL_2-stables et si $\mathfrak{C}(e)^{(j)}$ est une composante irréductible de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$ alors $\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) \subset \overline{K.e}$.

Définition

L'élément e est dit **quasi-$\mathfrak{p}$-distingué** (ou $\mathfrak{p}$-self large), si e vérifie $\mathcal{N}(\mathfrak{p}^e) \subset \overline{K.e}$.

Variété commutante

Le cas symétrique

Proposition (Premet (algèbres de Lie), B.)

Si e est quasi-$\mathfrak{p}$-distingué alors $\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e,0)) = \{0\}$.

Proposition (Premet (algèbres de Lie), B.)

Si e est quasi-$\mathfrak{p}$-distingué alors $\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e,0)) = \{0\}$.

Définition

Un élément nilpotent e est dit **presque $\mathfrak{p}$-distingué** si $\mathfrak{p}(e,0)$ est un tore (*i.e.* une sous-algèbre abélienne d'éléments semi-simples).

Proposition (Premet (algèbres de Lie), B.)

Si e est quasi-$\mathfrak{p}$-distingué alors $\mathcal{N}(\mathfrak{p}(e,0)) = \{0\}$.

Définition

Un élément nilpotent e est dit **presque $\mathfrak{p}$-distingué** si $\mathfrak{p}(e,0)$ est un tore (*i.e.* une sous-algèbre abélienne d'éléments semi-simples).

Remarque

Un élément e est **$\mathfrak{p}$-distingué** (*i.e.* $\mathfrak{p}^e \subset \mathcal{N}(\mathfrak{p})$ ou encore $\mathfrak{p}^e \subset \overline{K.e}$) si et seulement si $\mathfrak{p}(e,0) = \{0\}$.

Variété commutante
Le cas symétrique

$$\{\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{quasi-}\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}\}$$

Variété commutante

Le cas symétrique

$$\{\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{quasi-}\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}\}$$

$\delta(e) = 0$

Variété commutante

Le cas symétrique

$$\{\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \subseteq \{\text{quasi-}\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \subseteq \{\text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}\}$$

$\delta(e) = 0$

$\delta(e) = \dim \mathfrak{p}(e, 0)$

$\{\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{quasi-}\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}\}$

$\delta(e) = 0$ $\qquad\qquad$ $\delta(e) = \dim \mathfrak{p}(e, 0)$

Résultats obtenus (B.)

Classification *au cas par cas des éléments presque* $\mathfrak{p}$*-distingués*

$\{\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{quasi-}\mathfrak{p}\text{-distingué}\} \quad \subseteq \quad \{\text{presque } \mathfrak{p}\text{-distingué}\}$

$\delta(e) = 0$ $\qquad\qquad$ $\delta(e) = \dim \mathfrak{p}(e, 0)$

Résultats obtenus (B.)

Classification *au cas par cas des éléments presque* $\mathfrak{p}$*-distingués et des éléments quasi-*$\mathfrak{p}$*-distingués*

Variété commutante

Le cas symétrique

Proposition

Si e_1 *et* e_2 *sont nilpotents,* e_1 *presque* $\mathfrak{p}$*-distingué,* $e_1 \in \overline{K.e_2}$ *et* $\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_1}) = \dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_2})$ *alors* $\mathfrak{C}(e_1) \subset \mathfrak{C}(e_2)$*.*

Proposition

Si e_1 *et* e_2 *sont nilpotents,* e_1 *presque* $\mathfrak{p}$*-distingué,* $e_1 \in \overline{K.e_2}$ *et* $\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_1}) = \dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_2})$ *alors* $\mathfrak{C}(e_1) \subset \mathfrak{C}(e_2)$.

Remarque

$\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_1}) = \dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_2})$ si et seulement si
$\delta(e_1) - \delta(e_2) = \dim K.e_2 - \dim K.e_1$

Variété commutante

Le cas symétrique

Proposition

Si e_1 et e_2 sont nilpotents, e_1 presque $\mathfrak{p}$-distingué, $e_1 \in \overline{K.e_2}$ et $\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_1}) = \dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_2})$ *alors $\mathfrak{C}(e_1) \subset \mathfrak{C}(e_2)$.*

Remarque

$\dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_1}) = \dim \mathcal{N}(\mathfrak{p}^{e_2})$ si et seulement si
$\delta(e_1) - \delta(e_2) = \dim K.e_2 - \dim K.e_1$

Résultats obtenus (B.)

Classification *au cas par cas des tels couples* (e_1, e_2)

Théorème (B.)

La variété $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$ *est* **équidimensionnelle** *et ses composantes irréductibles sont indexées par les* **éléments** $\mathfrak{p}$**-distingués** *dans les cas AIII, CII, DIII, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX, FI, FII, GI*

Théorème (B.)

La variété $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{p})$ *est* **équidimensionnelle** *et ses composantes irréductibles sont indexées par les* **éléments** $\mathfrak{p}$**-distingués** *dans les cas AIII, CII, DIII, EII, EIII, EIV, EV, EVI, EVII, EVIII, EIX, FI, FII, GI et dans les cas*

- AI $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$ *avec* $n \leqslant 5$ *(i.e. en rang* $\leqslant 4$*)*
- AII $(\mathfrak{sl}_{2n}, \mathfrak{sp}_{2n})$ *avec* $n \leqslant 3$ *(i.e en rang* $\leqslant 3$*).*
- BDI $(\mathfrak{so}_n, \mathfrak{so}_p \times \mathfrak{so}_q)$ *avec* $p \leqslant 2$ *ou* $q \leqslant 2$ *ou* $\max(p, q) \leqslant 4$*. (En particulier, elle est vraie en rang* $\leqslant 2$*)*
- CI $(\mathfrak{sp}_{2n}, \mathfrak{gl}_n)$ *avec* $n \leqslant 7$*. (i.e. en rang* $\leqslant 7$*)*

Plan

- Problématique : **Paramétrer** les G-orbites de $\mathfrak{g}$.

- Problématique : **Paramétrer** les G-orbites de $\mathfrak{g}$.

- Déterminer un "**quotient géométrique**" de $\mathfrak{g}$ par G ?

- Problématique : **Paramétrer** les G-orbites de $\mathfrak{g}$.

- Déterminer un "**quotient géométrique**" de $\mathfrak{g}$ par G ?

- **Impossible** car V/G existe seulement si $V = V^{(m)}$.

- Problématique : **Paramétrer** les G-orbites de $\mathfrak{g}$.
- Déterminer un "**quotient géométrique**" de $\mathfrak{g}$ par G ?
- **Impossible** car V/G existe seulement si $V = V^{(m)}$.
- Question alternative : Est-ce qu'une **nappe** admet un quotient géométrique malgré tout ?

Soit S une nappe de $\mathfrak{g}$, *i.e* une composante irréductible de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Quelques résultats :

Soit S une nappe de $\mathfrak{g}$, *i.e* une composante irréductible de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Quelques résultats :

Proposition (Bohro-Kraft 1979)

La nappe S contient une **unique orbite nilpotente***.*

Soit S une nappe de $\mathfrak{g}$, *i.e* une composante irréductible de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Quelques résultats :

Proposition (Bohro-Kraft 1979)

La nappe S contient une **unique orbite nilpotente***.*

Résultats obtenus (Bohro-Kraft 1979, Bohro 1981)

Paramétrisation de nappes à l'aide notamment des classes de décompositions

Soit S une nappe de $\mathfrak{g}$, *i.e* une composante irréductible de

$$\mathfrak{g}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \dim G.x = m\}.$$

Quelques résultats :

Proposition (Bohro-Kraft 1979)

La nappe S contient une **unique orbite nilpotente***.*

Résultats obtenus (Bohro-Kraft 1979, Bohro 1981)

Paramétrisation de nappes à l'aide notamment des classes de décompositions

Théorème (Im Hof 2005)

Si $\mathfrak{g}$ est classique alors S est **lisse***.*

Soit e un élément nilpotent de S que l'on inclut dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e, h, f).

Soit e un élément nilpotent de S que l'on inclut dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e, h, f).
On pose alors $e + X := (e + \mathfrak{g}^f) \cap S$.
$e + X$ est appelée *tranche de Slodowy* de S.

Soit e un élément nilpotent de S que l'on inclut dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e, h, f).
On pose alors $e + X := (e + \mathfrak{g}^f) \cap S$.
$e + X$ est appelée *tranche de Slodowy* de S.

Théorème (Katsylo 1983)

On a

$$S = G.(e + X).$$

Soit e un élément nilpotent de S que l'on inclut dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (e, h, f).
On pose alors $e + X := (e + \mathfrak{g}^f) \cap S$.
$e + X$ est appelée *tranche de Slodowy* de S.

Théorème (Katsylo 1983)

On a

$$S = G.(e + X).$$

Il existe un **quotient géométrique** *de S par G :*

$$S/G \cong (e + X)/A$$

où $A \cong G^e/(G^e)^\circ$ est un groupe fini.

Nappes
Le cas symétrique

Définition

Une K-**nappe** de $\mathfrak{p}$ est une composante irréductible de

$$\mathfrak{p}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{p} \mid \dim K.x = m\}$$

Définition

Une K**-nappe** de $\mathfrak{p}$ est une composante irréductible de

$$\mathfrak{p}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{p} \mid \dim K.x = m\}$$

Théorème (B.)

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}_n$, les K-nappes de $\mathfrak{p}$ sont disjointes et **lisses**.

Définition

Une K-**nappe** de $\mathfrak{p}$ est une composante irréductible de

$$\mathfrak{p}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{p} \mid \dim K.x = m\}$$

Théorème (B.)

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}_n$, les K-nappes de $\mathfrak{p}$ sont disjointes et **lisses**.
Si S_K est une K-nappe de $\mathfrak{p}$ et e est un élément nilpotent de S_K inclus dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal** *(e, h, f)*

Définition

Une K**-nappe** de $\mathfrak{p}$ est une composante irréductible de

$$\mathfrak{p}^{(m)} := \{x \in \mathfrak{p} \mid \dim K.x = m\}$$

Théorème (B.)

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}_n$, les K-nappes de $\mathfrak{p}$ sont disjointes et **lisses**.
Si S_K est une K-nappe de $\mathfrak{p}$ et e est un élément nilpotent de S_K inclus dans un $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal** *(e, h, f) alors*

$$S_K = \overline{K.(e + X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$$

où $e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S_K$.

Définition

La G-**classe de Jordan** (ou G-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ est définie par

$$J_G(x) = G.\{y \mid \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^y\}$$

Définition

La *G***-classe de Jordan** (ou G-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ est définie par

$$J_G(x) = G.\{y \mid \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^y\} = G.(\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^s)^\bullet + n)$$

où s et n sont les parties semi-simple et nilpotente de x.

Définition

La G-**classe de Jordan** (ou G-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ est définie par

$$J_G(x) = G.\{y \mid \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^y\} = G.(\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^s)^\bullet + n)$$

où s et n sont les parties semi-simple et nilpotente de x.

Propriétés

- *Les G-classes de Jordan sont* **irréductibles***, en nombre fini et chacune est incluse dans un $\mathfrak{g}^{(m)}$*

Définition

La *G*-**classe de Jordan** (ou G-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ est définie par

$$J_G(x) = G.\{y \mid \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^y\} = G.(\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^s)^\bullet + n)$$

où s et n sont les parties semi-simple et nilpotente de x.

Propriétés

- *Les G-classes de Jordan sont* **irréductibles**, *en nombre fini et chacune est incluse dans un* $\mathfrak{g}^{(m)}$
- *Toute nappe est* **union finie** *de G-classes de Jordan.*

Définition

La G-**classe de Jordan** (ou G-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{g}$ est définie par

$$J_G(x) = G.\{y \mid \mathfrak{g}^x = \mathfrak{g}^y\} = G.(\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^s)^\bullet + n)$$

où s et n sont les parties semi-simple et nilpotente de x.

Propriétés

- *Les G-classes de Jordan sont* **irréductibles**, *en nombre fini et chacune est incluse dans un $\mathfrak{g}^{(m)}$*
- *Toute nappe est* **union finie** *de G-classes de Jordan.*
- *Toute nappe contient une unique G-classe de Jordan dense.*

Définition

La K**-classe de Jordan** (ou K-classe de décomposition) d'un élément $x \in \mathfrak{p}$ est définie par

$$J_K(x) = K.\{y \mid \mathfrak{p}^x = \mathfrak{p}^y\} = K.(\mathfrak{c}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^s)^\bullet + n)$$

où $s, n \in \mathfrak{p}$ sont les parties semi-simple et nilpotente de x.

Propriétés

- *Les K-classes de Jordan sont* **irréductibles**, *en nombre fini et chacune est incluse dans un $\mathfrak{p}^{(m)}$*
- *Toute K-nappe contient une unique K-classe de Jordan dense.*

Lemme (Kostant-Rallis 1969)

Si $x \in \mathfrak{p}$ *alors* $\dim G.x = 2 \dim K.x$.

Lemme (Kostant-Rallis 1969)

Si $x \in \mathfrak{p}$ *alors* $\dim G.x = 2\dim K.x$. *En particulier*

$$\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{g}^{(2m)} \cap \mathfrak{p}$$

Stratégie :

- On étudie de $J \cap \mathfrak{p}$ pour une G-classe de Jordan J.

Lemme (Kostant-Rallis 1969)

Si $x \in \mathfrak{p}$ *alors* $\dim G.x = 2 \dim K.x$. *En particulier*

$$\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{g}^{(2m)} \cap \mathfrak{p}$$

Stratégie :

- On étudie de $J \cap \mathfrak{p}$ pour une G-classe de Jordan J.
- On cherche les K-classes de Jordan J_K de $J \cap \mathfrak{p}$ telles que $J_K \subset \overline{K.(e + X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$.

Lemme (Kostant-Rallis 1969)

Si $x \in \mathfrak{p}$ *alors* $\dim G.x = 2 \dim K.x$. *En particulier*

$$\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{g}^{(2m)} \cap \mathfrak{p}$$

Stratégie :

- On étudie de $J \cap \mathfrak{p}$ pour une G-classe de Jordan J.
- On cherche les K-classes de Jordan J_K de $J \cap \mathfrak{p}$ telles que $J_K \subset \overline{K.(e + X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$.
- Etude de $S \cap \mathfrak{p}$ pour une nappe S de $\mathfrak{g}$.

Théorème (B.)

Si $x = s + n \in \mathfrak{p}$, *alors*

$$J_G(x) \cap \mathfrak{p} = \bigcup_i J_K(x_i)$$

où les $x_i = s + n_i \in \mathfrak{p}$ *sont des éléments tels que* $n_i \in \mathfrak{p}^s \cap G.n$

Théorème (B.)

Si $x = s + n \in \mathfrak{p}$*, alors*

$$J_G(x) \cap \mathfrak{p} = \bigcup_i J_K(x_i)$$

où les $x_i = s + n_i \in \mathfrak{p}$ *sont des éléments tels que* $n_i \in \mathfrak{p}^s \cap G.n$
De plus, les composantes irréductible de $J_G(x)$ *sont* **précisément** *les* $J_K(x_i)$*, et* $J_G(x) \cap \mathfrak{p}$ *est* **équidimensionnelle***.*

Théorème (B.)

Si $x = s + n \in \mathfrak{p}$*, alors*

$$J_G(x) \cap \mathfrak{p} = \bigcup_i J_K(x_i)$$

où les $x_i = s + n_i \in \mathfrak{p}$ *sont des éléments tels que* $n_i \in \mathfrak{p}^s \cap G.n$
De plus, les composantes irréductible de $J_G(x)$ *sont* **précisément** *les* $J_K(x_i)$*, et* $J_G(x) \cap \mathfrak{p}$ *est* **équidimensionnelle***.*

Corollaire

Si $\mathfrak{g}$ *est une algèbre de Lie classique et* S_K *une* K*-nappe de* $\mathfrak{p}$ *alors* S_K *est une* **union** *de* K*-classes de Jordan.*

Nappes

Le cas symétrique

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$,

Nappes

Le cas symétrique

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$, $e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent**

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$,
$e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent** inclus dans (e, h, f) $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal**,

Nappes

Le cas symétrique

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$,
$e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent** inclus dans (e, h, f) $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal**,
$e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S$.

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$, $e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent** inclus dans (e, h, f) $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal**, $e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S$.

Lemme

Si $Y \subset e + X_{\mathfrak{p}}$, $Y \neq \emptyset$ *alors*

$$\dim K.Y = \dim Y + m$$

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$,
$e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent** inclus dans (e, h, f) $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal**,
$e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S$.

Lemme

Si $Y \subset e + X_{\mathfrak{p}}$, $Y \neq \emptyset$ *alors*

$$\dim K.Y = \dim Y + m$$

Définition

Une K-classe de Jordan $J \subset S \cap \mathfrak{p}$ est dite **bien adaptée** à e si

$$\dim J \cap (e + X_{\mathfrak{p}}) = \dim J - m.$$

On fixe jusqu'à la fin $S \subset \mathfrak{g}^{(m)}$ une G-nappe de $\mathfrak{g}$ intersectant $\mathfrak{p}$,
$e \in S \cap \mathfrak{p}$ un élément **nilpotent** inclus dans (e, h, f) $\mathfrak{sl}_2$-triplet **normal**,
$e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S$.

Lemme

Si $Y \subset e + X_{\mathfrak{p}}$, $Y \neq \emptyset$ alors

$$\dim K.Y = \dim Y + m$$

Définition

Une K-classe de Jordan $J \subset S \cap \mathfrak{p}$ est dite **bien adaptée** à e si

$$\dim J \cap (e + X_{\mathfrak{p}}) = \dim J - m.$$

Ceci est équivalent à $J \subset \overline{K.(e + X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e + X_{\mathfrak{p}}) = G.(S \cap \mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e+X_{\mathfrak{p}}) = G.(S\cap\mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

alors pour toute K-classe de Jordan $J_1 \subset S\cap\mathfrak{p}$, il existe une K-classe de Jordan $J_2 \in S\cap\mathfrak{p}$ telle que

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e + X_{\mathfrak{p}}) = G.(S \cap \mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

alors pour toute K-classe de Jordan $J_1 \subset S \cap \mathfrak{p}$, il existe une K-classe de Jordan $J_2 \in S \cap \mathfrak{p}$ telle que

- *J_1 et J_2 sont contenues dans la même G-classe de Jordan.*

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e + X_{\mathfrak{p}}) = G.(S \cap \mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

alors pour toute K-classe de Jordan $J_1 \subset S \cap \mathfrak{p}$, il existe une K-classe de Jordan $J_2 \in S \cap \mathfrak{p}$ telle que

- *J_1 et J_2 sont contenues dans la même G-classe de Jordan.*
- *J_2 est* **bien adaptée** *à e.*

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e+X_{\mathfrak{p}}) = G.(S\cap\mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

alors pour toute K-classe de Jordan $J_1 \subset S\cap\mathfrak{p}$, il existe une K-classe de Jordan $J_2 \in S\cap\mathfrak{p}$ telle que

- *J_1 et J_2 sont contenues dans la même G-classe de Jordan.*
- *J_2 est* **bien adaptée** *à e.*

Corollaire (B.)

Si de plus

$$X_{\mathfrak{p}} \text{ est irréductible} \qquad (\diamondsuit)$$

Proposition (B.)

Supposons que

$$G.(e+X_{\mathfrak{p}}) = G.(S\cap\mathfrak{p}) \qquad (\heartsuit)$$

alors pour toute K-classe de Jordan $J_1 \subset S\cap\mathfrak{p}$, il existe une K-classe de Jordan $J_2 \in S\cap\mathfrak{p}$ telle que

- *J_1 et J_2 sont contenues dans la même G-classe de Jordan.*
- *J_2 est* **bien adaptée** *à e.*

Corollaire (B.)

Si de plus

$$X_{\mathfrak{p}} \text{ est irréductible} \qquad (\diamondsuit)$$

alors $$S_K := \overline{K.(e+X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$$
est une composante irréductible de dimension **maximale** *de $S\cap\mathfrak{p}$.*

Théorème (B.)

Sous les conditions précédentes (♡) et (♢), et si

$$\begin{array}{c}\textit{Toute } K\textit{-classe de Jordan } J \subset S \cap \mathfrak{p} \textit{ est} \\ \textbf{bien adaptée} \textit{ à un élément } e' \in G.e \cap \mathfrak{p}\end{array} \qquad (\clubsuit)$$

Théorème (B.)

Sous les conditions précédentes (♡) et (♢), et si

$$\text{Toute } K\text{-classe de Jordan } J \subset S \cap \mathfrak{p} \text{ est } \textbf{bien adaptée} \text{ à un élément } e' \in G.e \cap \mathfrak{p} \qquad (\clubsuit)$$

alors $S \cap \mathfrak{p}$ est **équidimensionnelle**

Théorème (B.)

Sous les conditions précédentes ($\heartsuit$) *et* ($\diamondsuit$), *et si*

$$\begin{array}{c}\textit{Toute } K\textit{-classe de Jordan } J \subset S \cap \mathfrak{p} \textit{ est} \\ \textbf{bien adaptée } \textit{à un élément } e' \in G.e \cap \mathfrak{p}\end{array} \qquad (\clubsuit)$$

alors $S \cap \mathfrak{p}$ *est* **équidimensionnelle** *et ses composantes irréductibles sont les ensembles de la forme*

$$\overline{K.((e' + \mathfrak{p}^{f'}) \cap S)}^{\bullet}$$

où $e' \in S \cap \mathfrak{p}$ *est nilpotent et* (e', h', f') *est un* $\mathfrak{sl}_2$*-triplet normal.*

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_n$, la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ appartient à l'un des **trois** types suivants :

- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$, cas AI
- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_n)$, cas AII
- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_{n-p} \oplus \mathbb{C})$, cas AIII

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_n$, la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ appartient à l'un des **trois** types suivants :

- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n)$, cas AI
- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sp}_n)$, cas AII
- $(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{sl}_p \oplus \mathfrak{sl}_{n-p} \oplus \mathbb{C})$, cas AIII

Proposition (B.)

Dans les cas AI, AII et AIII, les propriétés ($\heartsuit$) et ($\diamondsuit$) et ($\clubsuit$) sont vérifiées.

Théorème (B.)

Si $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{gl}_n$, S_K *est une* K*-nappe de* $\mathfrak{p}$ *et* e *est un élément nilpotent de* S_K *inclus dans un* $\mathfrak{sl}_2$*-triplet normal* (e, h, f) *alors*

$$S_K = \overline{K.(e + X_{\mathfrak{p}})}^{\bullet}$$

où $e + X_{\mathfrak{p}} = (e + \mathfrak{p}^f) \cap S_K$.

Résultats obtenus (B.)

Classification des K-nappes dans les cas AI, AII et AIII :

Résultats obtenus (B.)

Classification des K-nappes dans les cas AI, AII et AIII :

- *AI :* **bijection** *avec les G-nappes, les G-orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$, les O_n-orbites nilpotentes de $\mathfrak{p}$.*

Résultats obtenus (B.)

Classification des K-nappes dans les cas AI, AII et AIII :

- *AI :* **bijection** *avec les G-nappes, les G-orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$, les O_n-orbites nilpotentes de $\mathfrak{p}$.*
- *AII : bijection avec les K-orbites nilpotentes de $\mathfrak{p}$.*

Résultats obtenus (B.)

Classification des K-nappes dans les cas AI, AII et AIII :

- *AI :* **bijection** *avec les G-nappes, les G-orbites nilpotentes de $\mathfrak{g}$, les O_n-orbites nilpotentes de $\mathfrak{p}$.*
- *AII : bijection avec les K-orbites nilpotentes de $\mathfrak{p}$.*
- *AIII : Plus compliqué (cf. Ohta).*

Je vous remercie de votre attention

lie Cartan in a photo taken in 1903.