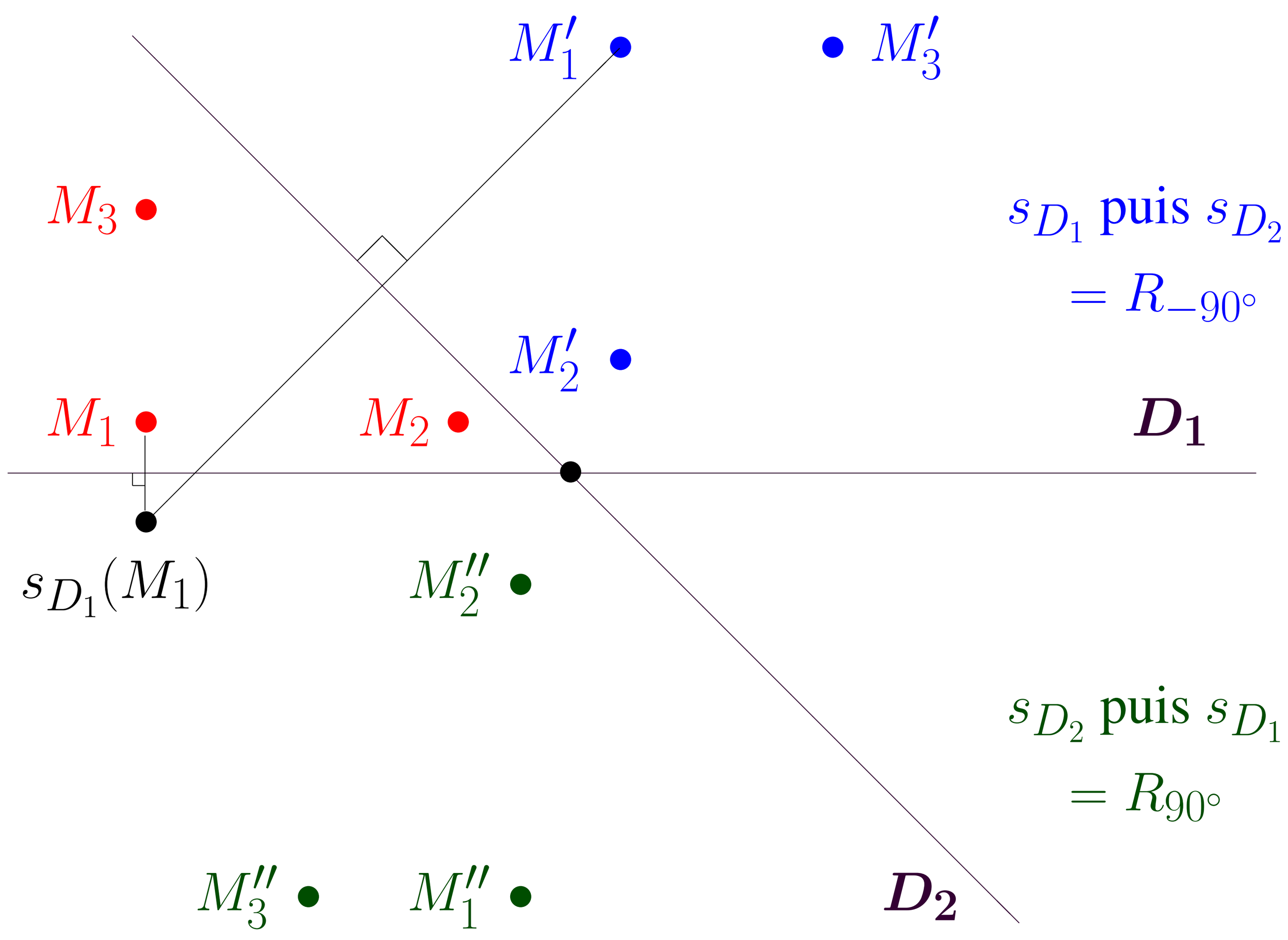
Composantes irréductibles de l'ensemble des commutants pour une structure avec multiplication (Michaël Bulois)

Structure avec multiplication?

Une multiplication sur un ensemble prend deux éléments pour en donner un troisième (elle doit en fait posséder quelques propriétés en plus). Les entiers ont une multiplication bien sur...

$$(a,b) \to a \times b$$

...mais aussi les symétries et les rotations. Si on a deux symétries s_{D_1} et s_{D_2} d'axes D_1 et D_2 passant par 0, alors on peut faire la première symétrie puis la deuxième, et ça nous donne une rotation:

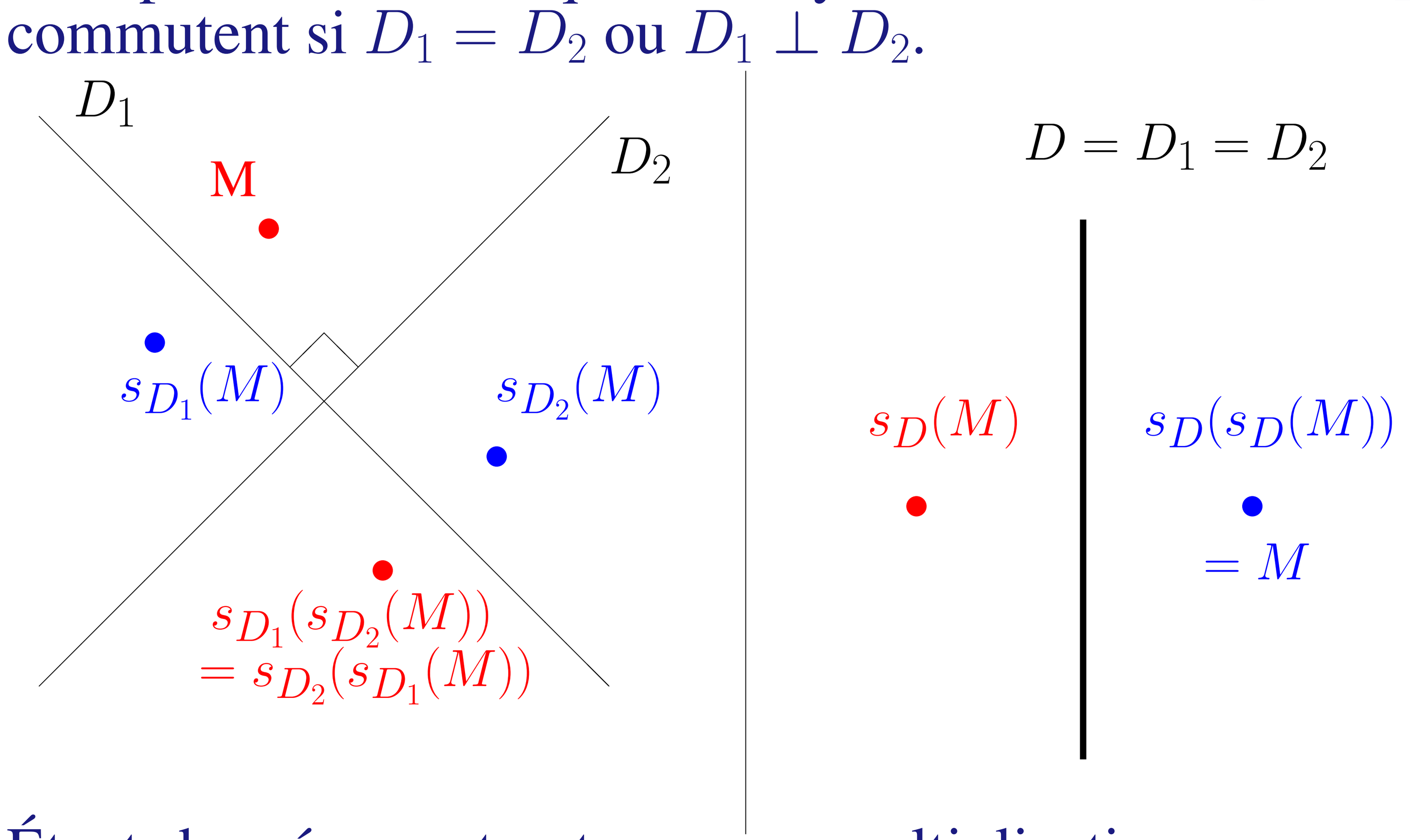


Commuter? ensemble des commutants?

Définition: Deux éléments f et g commutent pour la multiplication $*$ si $f * g = g * f$.
Exemple: les entiers commutent

$$3 * 4 = 4 * 3 = 12.$$

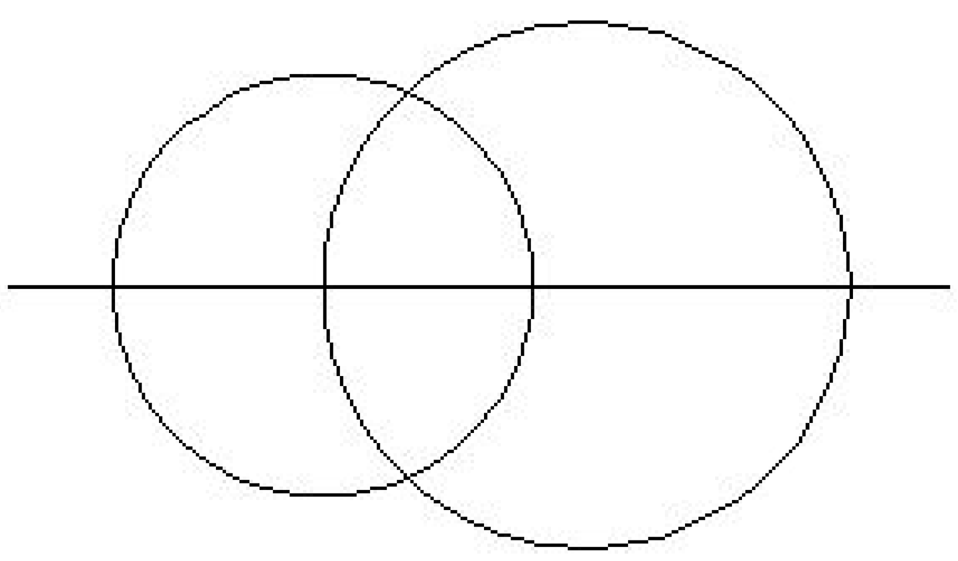
Mais le dessin à gauche montre que les symétries ne commutent pas forcément. Si on fait quelques calculs, il est possible de voir que deux symétries d'axe D_1 et D_2 commutent si $D_1 = D_2$ ou $D_1 \perp D_2$.



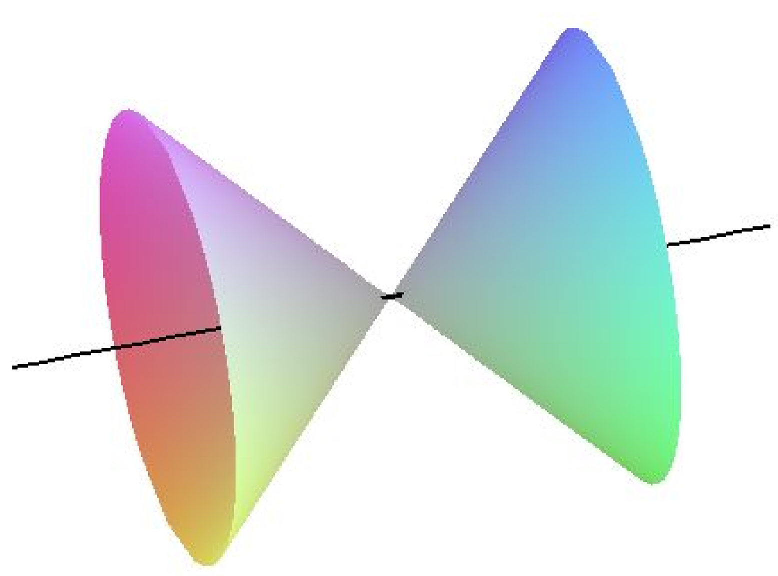
Étant donné une structure avec multiplication, son ensemble commutant est l'ensemble des paires d'éléments qui commutent.

Composantes irréductibles?

Ce sont en quelque sorte les morceaux d'un ensemble, par exemple



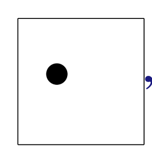
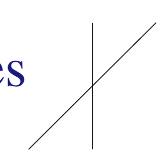
a trois composantes irréductibles, ce sont les deux cercles et la droite . De même, la figure suivante



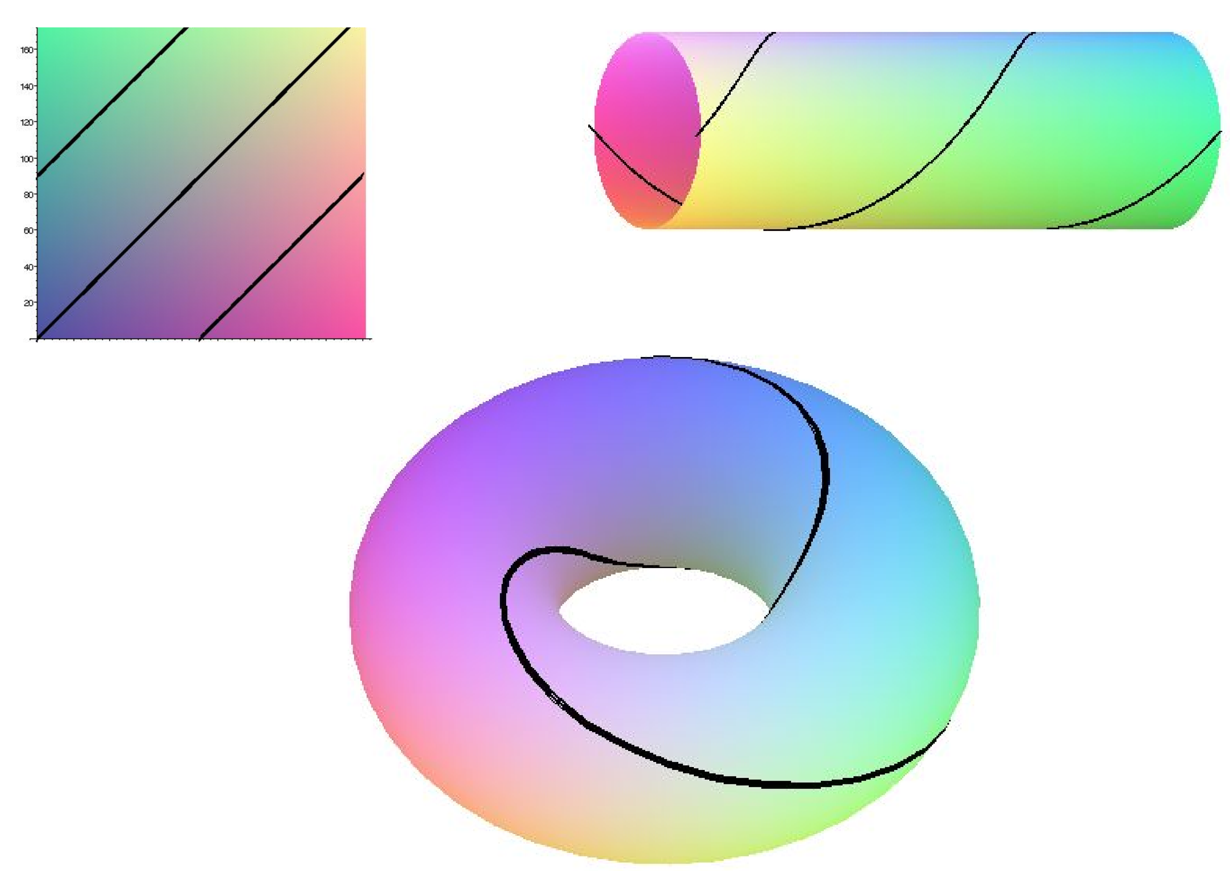
a deux composantes irréductibles: le cône et la droite.

Composantes irréductibles des symétries commutantes:

On caractérise chaque symétrie par l'angle de son axe avec l'horizontale. On peut donc associer à chaque paire de symétries un point dans le carré de coté 180 C'est le point dont les coordonnées représentent les angles des axes de symétries avec l'horizontale

Dans , le point (45,90) correspond aux symétries d'axes 

Comme les symétries qui commutent ont, soit le même axe, soit leurs axes orthogonaux, on peut tracer les éléments qui leur correspondent dans le carré



LaTeX 2_ε