Michaël BULOIS
08/10/1983
http://math.univ-angers.fr/~bulois
Michael.Bulois@univ-angers.fr

LAREMA,
2 boulevard Lavoisier,
49045 Angers.
06 33 12 04 91

Projet de Recherche :

Contexte

Mes travaux antérieurs [Bu1, Bu2, Bu3] s'inscrivent dans le cadre général de l'étude de l'**action diagonale** (ou *action doublée*) d'un groupe algébrique adjoint semisimple complexe G sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ où $\mathfrak{g}$ est son algèbre de Lie. Plus généralement, on pose $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, une algèbre de Lie $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-graduée ($[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$) et G_0, le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On s'intéresse alors à l'étude de l'action de G_0 sur $\mathfrak{g}_1$ et de l'action diagonale de G_0 sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$.

Dans ce contexte, il existe de nombreux problèmes ouverts. Citons la recherche de "bons" **espaces quotients**. Il s'agit de prouver l'existence, voire de construire, des quotients catégoriques ou géométriques de certains sous-espaces de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ sous l'action de G_0. Ainsi, les nappes -composantes irréductibles de l'ensemble des éléments d'une dimension d'orbite donnée-sont des candidats naturels à avoir un quotient géométrique. La construction d'un quotient géométrique des nappes a été donnée pour les algèbres de Lie ($m = 1$) et la question de son existence est ouverte en général.

Lorsque $m = 1, 2$, la variété commutante $\mathfrak{C}(\mathfrak{g}_1)$ est la fibre en 0 de l'application $\phi = [.,.] : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ (si $m = 1$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$) et la compréhension de sa géométrie apparaît comme importante dans la description de l'action doublée. Une question ouverte depuis plusieurs dizaines d'années est de savoir si l'idéal de définition de cette variété est engendré par les équations quadratiques évidentes $[x, y] = 0$. Autrement dit, il s'agit de savoir si le schéma commutant est un **schéma réduit**. Des études récentes ont montré que c'est génériquement le cas (i.e. localement autour de points appartenant à un certain ouvert dense de $\mathfrak{C}(\mathfrak{g})$).

Mentionnons aussi un thème objet de plusieurs publications depuis une dizaine d'années : la recherche de bons analogues doublés au **cône des éléments nilpotents** $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$. Il s'agit de trouver des sous-variétés de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ayant des propriétes analogues à celles de $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$. Parmi les propositions récentes de tels ensembles, citons les paires nilpotentes (principales) de [Gi] qui ont des propriétés de type Jacobson-Morozov impliquant des $\mathfrak{sl}_2$-triplets et pour lesquels on a des resultats de finitude sur le nombre d'orbites. Un autre exemple est donnée par le bicône nilpotent $\{(x, y) \mid \alpha x + \beta y \in \mathcal{N}(\mathfrak{g}),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$, étudié dans [CM], qui est une intersection complète définie par des polynômes analogues à ceux de $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$.

Interactions

Les cadres mentionnés dans la partie "contexte" incluent l'étude de la géométrie des représentations de plusieurs **carquois**, les $\tilde{A}_{m-1}$ et leur version doublée (le nombre de flèches entre deux sommets sont doublées). Ces carquois apparaissent lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ et les versions doublées sont des carquois *sauvages*. Ainsi, l'article [Bu2] inclue l'étude de la géométrie de l'ensemble des nappes de l'espace des représentations de $\tilde{A}_1$. Ceux sur la variété commutante ([Bu1, Bu3]) donnent des informations sur un sous-ensemble de l'espace des représentations de la version doublée de $\tilde{A}_1$.

Le **schéma de Hilbert** ponctuel $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ est un schéma paramétrant les sous-schémas de longueur n du plan affine $\mathbb{A}^2$. Il se trouve que $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ est un quotient d'un ouvert de la variété commutante sous l'action de G et l'étude des ces deux objets bénéficie de cette correspondance. C'est au travers de celle-ci qu'ont été montré l'irréductibilité de la variété commutante nilpotente $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{s}l_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{C}(\mathfrak{s}l_n) \cap (\mathcal{N}(\mathfrak{s}l_n) \times \mathcal{N}(\mathfrak{s}l_n))$, et celle du schéma de Hilbert concentré en un point sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Mentionnons enfin que l'étude de $Hilb^n(\mathbb{A}^2)$ a été considérablement relancée à la fin des années 1990 par la découverte d'une connexion entre son algèbre homologique et des représentations d'algèbres de Heisenberg. Ceci a donné lieu à une interprétation homologique des opérateurs de création et de destruction apparaissant en physique théorique [Na, §8].

L'application $\phi : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ mentionnée dans la partie "contexte" peut être vue comme une **application moment**. L'étude de ses fibres a donc un intérêt en géométrie symplectique et en théorie géométrique des invariants.

Enfin, l'étude de $\mathfrak{C}^{nil}(\mathfrak{g}_1)$ joue un rôle dans l'analyse des **distributions invariantes** ; plus particulièrement dans des questions de théorie des représentations telles que la propriété de Gelfand pour les paires symétriques [Sa, §3].

Le Projet

Je propose comme projet de recherche de développer des outils permettant l'étude à plusieurs niveaux de ces actions doublées, en particulier dans le cadre des algèbres de Lie symétriques ($m = 2$).

Tout d'abord, une **continuation** directe de mes travaux antérieurs est possible. Il est naturel de se demander dans quelle mesure les résultats obtenus sur les variétés commutantes et les nappes restent valides pour toutes les algèbres de Lie symétriques. Ceci devrait nécessiter des techniques plus poussées que celles existantes. Mais certains resultats tels que la paramétrisation des G_0-nappes ou la preuve de l'équidimensonnalité de la variété commutante nilpotente semblent accessibles pour d'autres algèbres de Lie symétriques.

Par ailleurs, il serait également intéressant de chercher a améliorer notre connaissance sur **d'autres aspects** de ces variétés dans le cadre symétrique. Par exemple, on peut espérer prouver que les G_0-nappes ont des quotients géométriques sous l'action de G_0 (au moins dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.) On peut également s'intéresser à l'idéal de définition du schéma commutant nilpotent, essayer de savoir si ce dernier est réduit ou essayer de relier cette question à son analogue (ouverte) sur le schéma commutant. Aussi, le schéma de Hilbert possède un analogue $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-gradué, récemment étudié (Chaput et Evain, 2010), qui devrait apporter un éclairage nouveau sur les variétés commutantes dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

On peut également chercher les propriétés **d'autres variétés**. Ainsi, le bicône nilpotent a un analogue naturel dans le cas symétrique. Les méthodes de A. Moreau ne se transcrivent pas aisément dans le cadre symétrique. On devrait donc essayer de développer d'autres techniques adaptées à cette variété afin de vérifier la validité de propriétés analogues.

Il est aussi impératif de regarder ces problèmes à **plusieurs échelles**. Une bonne compréhension des actions doublées devrait tirer profit de l'analyse de la situation tant dans des cas particuliers (e.g. $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$) que dans des cadres très généraux (e.g. m quelconque, action triplée, ...). Cela permet de distinguer les caractéristiques partagées par toutes les actions doublées, des particularités de $\mathfrak{gl}_n$ et du cas des algèbres de Lie ($m = 1$). L'étude de la variété commutante est particulièrement revelateur de ces différences. Elle est irréductible lorsque $m = 1$ et réductible dans certains cas où $m = 2$, ceci étant lié à l'existence de certaines paires particulières qu'on ne trouve que dans quelques algèbres de Lie symétriques.

Par ailleurs, comme expliqué ci-dessus, il existe de nombreuses **interactions** entre ces questions et d'autres thèmes mathématiques. Ceci rend l'étude de ces problèmes d'autant plus intéressante, outre leur coté naturel. J'ai eu l'occasion de rencontrer différents chercheurs spécialistes des domaines précités et je propose également comme projet de développer certaines de ces interactions en collaboration avec ces chercheurs.

Enfin, je dispose d'idées de départ pour plusieurs de ces problèmes et je les pense, dans l'ensemble, relativement accessibles. Certaines de ces idées ont d'ailleurs d'ors et dejà donné des résultats partiels.

Je propose de réaliser ce projet de recherche dans l'équipe de théorie des représentations de l'université Paris VII ou dans l'équipe de groupes algébriques du laboratoire de mathématiques de Poitiers (site du Futuroscope).

Références

[Bu1] M. Bulois, Composantes irréductibles de la variété commutante nilpotente d'une algèbre de Lie symétrique semi-simple, *Annales de l'institut Fourier*, **59** (2009), p. 37-80

[Bu2] M. Bulois, Sheets of Symmetric Lie Algebras and Slodowy Slices, *Journal of Lie Theory*, **21** (2011), 1–54.

[Bu3] M. Bulois, Irregular locus of the commuting variety of reductive symmetric Lie algebras and rigid pairs, *preprint*, arXiv : 1009.0688 (2010).

[CM] J. Y. Charbonnel and A. Moreau, Nilpotent bicone and characteristic submodule in a reductive Lie algebra, *Transform. Groups* **14** (2009), 319-360.

[Gi] V. Ginzburg, Principal nilpotent pairs in a semisimple Lie algebra I., *Invent. Math.* **140** (2000), 511-561.

[Na] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lecture Ser. **18**, 1999.

[Sa] E. Sayag, $(GL(2n,\mathbb{C}), Sp(2n,\mathbb{C}))$ is a Gelfand pair, *preprint*, arXiv :0810.1853 (2008).