RAPPORT DE STAGE DE M2 : POLYNOMIALITÉ DE $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ POUR $\mathfrak{g}$ UNE ALGÈBRE DE LIE SEMI-SIMPLE ET INTRODUCTION AU PROBLÈME DE LA POLYNOMIALITÉ DE $S(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ POUR $\mathfrak{p}$ UNE SOUS-ALGÈBRE PARABOLIQUE

KENNY PHOMMADY, ENCADRÉ PAR MICHAEL BULOIS ET FLORENCE FAUQUANT-MILLET

Les algèbres de Lie (du nom de Sophus Lie) sont des algèbres non associatives munies d'un produit appelé crochet de Lie qui doit justifier certaines propriétés. Les algèbres de Lie ont leur intérêt non seulement dans leurs mathématiques, mais également en physique ou en chimie.

Dans ce sujet, on s'intéresse à des algèbres de Lie semi-simples (c'est-à-dire produits d'algèbre de Lie simples). Ces algèbres peuvent être étudiées à la fois de manière combinatoire via des systèmes de racines associés, ou bien de manière géométrique via ce que l'on appelle le groupe adjoint. L'intérêt sera focalisé dans cette présentation sur la première approche.

On s'intéresse en particulier ici à un résultat dû à Chevalley : si $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$ (qui s'identifie aux fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$), la sous-algèbre $Y(\mathfrak{g}) := S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des fonctions sur $\mathfrak{g}^*$ invariantes par $\mathfrak{g}$ est une algèbre de polynômes. C'est ce résultat qui sera présenté dans un premier temps. L'étude plus générale de la polynomialité de certaines algèbres d'invariants est un problème crucial en théorie des invariants. Par exemple, la polynomialité de $Y(\mathfrak{g})$ a en elle-même des conséquences en théorie des représentations des algèbres de Lie.

La thèse s'intéressera notamment à des algèbres d'invariants associées à des algèbres paraboliques. Les algèbres paraboliques prolongent en un certain sens les algèbres de Lie réductives (qui sont produits d'une algèbre semi-simple et d'une algèbre commutative).

Le rapport de stage s'articule autour des bases de la théorie des algèbres de Lie (d'un point de vue algébrique), des systèmes de racines qui en permettent une étude combinatoire, de la démonstration du théorème de Chevalley et de quelques points permettant une ouverture vers le sujet de la thèse.

Certains résultats dont la démonstration a été jugée technique ou peu éclairante sont annoncés comme "admis" dans ce rapport. On donnera tout de même les références dans lesquelles les démonstrations sont faites.

Table des matières

Date: 30 août 2017.

Conventions

Bien que l'on puisse se placer dans un cadre plus général, on se placera dans le cas où le corps de base des algèbres de Lie est le corps des nombres complexes. Si aucune précision n'est apportée, un espace vectoriel aura pour corps de base $\mathbb{C}$. Certaines conventions de notation seront présentées en début de section et conservées pour toute la suite, elles seront à chaque fois précisées. On les rappellera toutefois dans les théorèmes.

On rappelle enfin cette généralité sur les espaces vectoriels de dimension finie :

Définition. *Soit k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une fonction $f : E \to k$ est **polynomiale sur** E s'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et une fonction polynomiale g à n indéterminées sur k telle que l'on ait :*

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in k,\ f\left(\sum_i x_i e_i\right) = g(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

On remarque que si f est polynomiale, alors pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ *de E, il existe une fonction polynomiale g à n indéterminées sur k telle que l'on ait* (1)*.*

1. Généralités sur les algèbres de Lie

On introduit ici les définitions et les propriétés générales sur les algèbres de Lie qui seront utiles par la suite. Cette section est largement inspirée de [2, chap. 1.1].

1.1. Premières définitions.

Définition 1.1.1. *Une **algèbre de Lie** sur $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'un crochet de Lie $(x, y) \in \mathfrak{g}^2 \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- *bilinéarité : $(x, y) \mapsto [x, y]$ est bilinéaire*
- *antisymétrie : $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x]$*
- *identité de Jacobi : $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$*

On déduit immédiatement des propriétés d'une algèbre de Lie que pour tout x de $\mathfrak{g}$, $[x, x] = 0$. Les algèbres de Lie sont ainsi des algèbres (avec le crochet de Lie comme produit). Cependant, elles ne sont ni associatives, ni commutatives, ni unifères en général.

Dans toute la suite, $\mathfrak{g}$ désignera une algèbre de Lie.

Propriété 1.1.2. *$\mathfrak{g}$ est commutative si et seulement si son crochet de Lie est nul.*

Exemple 1.1.3. *Quelques exemples importants d'algèbres de Lie :*

- *Soit A une algèbre associative. On peut associer à A une structure d'algèbre de Lie donnée par : $\forall x, y \in A, [x, y] = xy - yx$.*
- *Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on note $\mathfrak{gl}(V)$ l'algèbre de Lie associée à l'algèbre (associative) des endomorphismes de V, notée $\mathrm{End}(V)$, et on note $\mathfrak{gl}_n$ l'algèbre de Lie associée à $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.*

Définition 1.1.4. *On définit les morphismes (isomorphismes, endomorphismes et automorphismes) d'algèbres de Lie et les algèbres de Lie produits comme dans le cadre général des algèbres. On note $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des automorphismes d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Remarque 1.1.5.

- *Si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux algèbres de Lie, on notera* $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ *si l'on parle de l'algèbre de Lie produit de* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$*, et* $\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}$ *si l'on parle de l'espace vectoriel somme directe des espaces vectoriels* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$*.*
- *On note* $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *l'ensemble des* endomorphismes linéaires *de l'espace vectoriel* $\mathfrak{g}$*.*

Définition 1.1.6.

- *Si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathfrak{g}$*, on note* $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ *le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(\{[a,b]\,|\,a\in\mathfrak{a},b\in\mathfrak{b}\})$*.*
- $\mathfrak{g}'$ *est une* ***sous-algèbre de Lie*** *de* $\mathfrak{g}$ *si c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$ *et si* $[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']\subset\mathfrak{g}'$*.*
- $\mathfrak{g}'$ *est un* ***idéal*** *de* $\mathfrak{g}$ *si c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$ *et si* $[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}'$*.*
- *Si* $\mathfrak{g}'$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*, on munit l'espace vectoriel* $\mathfrak{g}\,/\,\mathfrak{g}'$ *d'une structure d'algèbre de Lie en posant :* $\forall x,y\in\mathfrak{g},[x \bmod \mathfrak{g}', y \bmod \mathfrak{g}'] = [x,y] \bmod \mathfrak{g}'$*.*

Exemple 1.1.7. *L'ensemble des matrices de* $\mathfrak{gl}(V)$ *de trace nulle est un idéal de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}(V)$ *noté* $\mathfrak{sl}(V)$*. On définit de même* $\mathfrak{sl}_n$*.*

Remarque 1.1.8. *Les notations viennent du fait que ces algèbres de Lie sont associées aux groupes* GL_n *et* SL_n*, mais nous ne développerons pas cet aspect ici.*

Notation 1.1.9. $\mathfrak{sl}_2$ *est de dimension* 3*, engendrée par :*

$$e=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ f=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

vérifiant $[e,f]=h$*,* $[h,e]=2e$*,* $[h,f]=-2f$*.*

Les notations sont standard, et seront réutilisées par la suite.

Notation 1.1.10. *Soient* $P,Q\subset\mathfrak{g}$*.*

- *Le* ***centralisateur*** *de* P *dans* Q *sera noté* $\mathfrak{c}_Q(P):=\{x\in Q\,|\,[x,P]=0\}$*.*
  - *Le centre de* $\mathfrak{g}$ *(qui est* $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$*) sera noté* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*.*
  - *Pour* x *dans* $\mathfrak{g}$*, on note* $\mathfrak{g}^x:=\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\{x\})$*.*
- *Le* ***normalisateur*** *de* P *dans* Q *sera noté* $\mathfrak{n}_Q(P):=\{x\in Q\,|\,[x,P]\subset P\}$*. Si* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*,* $\mathfrak{h}$ *est un idéal de* $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$*, lui-même une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*.*

Définition 1.1.11. *Une dérivation de* $\mathfrak{g}$ *est une application linéaire* D *de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *qui vérifie*

$$\forall x,y\in\mathfrak{g}, D([x,y])=[D(x),y]+[x,D(y)]$$

On note $\mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}$ *l'ensemble des dérivations de* $\mathfrak{g}$*, qui est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$*.*

Exemple 1.1.12. *Pour* $x\in\mathfrak{g}$*, on note* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x : y\in\mathfrak{g}\mapsto[x,y]\in\mathfrak{g}$ *(ou* $\mathrm{ad}\,x$ *quand il n'y a pas d'ambiguïté). C'est une dérivation de* $\mathfrak{g}$*, et on appelle* ***dérivation intérieure*** *de* $\mathfrak{g}$ *toute dérivation de cette forme.*

Définition 1.1.13. *Un* ***idéal caractéristique*** *de* $\mathfrak{g}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{g}$ *stable par* $\mathfrak{d}_{\mathfrak{g}}$*. On remarque immédiatement que :*

- *un idéal caractéristique de* $\mathfrak{g}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$*,*
- *si* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont des idéaux caractéristiques de* $\mathfrak{g}$*,* $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ *aussi.*

Définition 1.1.14. *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *des algèbres de Lie, et un morphisme* $\phi : b\in\mathfrak{b}\mapsto D_b\in\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}$*. On définit alors* $\mathfrak{b}\ltimes_\phi\mathfrak{a}$ *le* ***produit semi-direct*** *de* $\mathfrak{b}$ *par* $\mathfrak{a}$ *(correspondant à* ϕ*) par*

- $\mathfrak{b}\ltimes_\phi\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}$ *comme espaces vectoriels*
- *on pose pour* $a,a'\in\mathfrak{a}$*,* $b,b'\in\mathfrak{b}$

$$[(b,a),(b',a')]=([b,b'],[a,a']+D_b(a')-D_{b'}(a))$$

$\mathfrak{a}$ *est alors un idéal de* $\mathfrak{b} \ltimes_\phi \mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{b}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{b} \ltimes_\phi \mathfrak{a}$.

Définition 1.1.15. *Soit* $\mathcal{N}$ *l'ensemble des* $x \in \mathfrak{g}$ *tels que* $\operatorname{ad} x$ *est un endomorphisme nilpotent de* $\mathfrak{g}$*. Pour tout* $x \in \mathcal{N}$*,* $\exp(\operatorname{ad} x)$ *(qui a un sens) est alors un automorphisme de* $\mathfrak{g}$*, appelé* ***automorphisme élémentaire*** *de* $\mathfrak{g}$*. On note* $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *le sous-groupe de* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ *engendré par les automorphismes élémentaires de* $\mathfrak{g}$*, qui est appelé le* ***groupe des automorphismes élémentaires*** *de* $\mathfrak{g}$*. Comme pour tout* $x \in \mathcal{N}$*,* $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$*, on a* $\operatorname{ad} \alpha(x) = \alpha \circ \operatorname{ad} x \circ \alpha^{-1}$*, le sous-groupe* $\operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$ *est distingué dans* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

1.2. **Représentations d'une algèbre de Lie.**

Définition 1.2.1. *Une* ***représentation*** *de* $\mathfrak{g}$ *dans un espace vectoriel* V *est un morphisme d'algèbres de Lie* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{gl}(V)$*. La* ***dimension*** *de* ρ*, notée* $\dim \rho$ *est celle de* V*. On pose alors pour* $x \in \mathfrak{g}$ *et* $v \in V$*,* $x_V := \rho(x)$ *et* $x_V v = xv := \rho(x)(v)$.

On dit aussi que V *est un* $\mathfrak{g}$***-module****. Ce module est dit* ***trivial*** *si* $\rho = 0$.

Jusqu'à la fin de cette section, ρ sera une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V.

Exemple 1.2.2.
- $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} : x \in \mathfrak{g} \mapsto \operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *est une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *appelée* ***représentation adjointe*** *de* $\mathfrak{g}$*, que l'on note* ad *s'il n'y a pas d'ambiguïté. Son noyau est* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.
- *Une représentation de dimension* 1 *de* $\mathfrak{g}$ *s'identifie à une forme linéaire* λ *sur* $\mathfrak{g}$ *nulle sur* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Définition 1.2.3.
- *Soient* ρ *de* $\mathfrak{g}$ *dans* V *et* ρ' *de* $\mathfrak{g}$ *dans* V' *deux représentations. Une application linéaire* $u : V \to V'$ *est un* $\mathfrak{g}$***-morphisme*** *de* V *dans* V' *si pour tout* $x \in \mathfrak{g}$*, on a* $\rho'(x) \circ u = u \circ \rho(x)$.
- ρ *et* ρ' *sont* ***équivalentes*** *s'il existe un* $\mathfrak{g}$*-morphisme bijectif de* V *dans* V'.

Définition 1.2.4. *De la même manière que pour des représentations de groupe, on définit alors une somme de représentations, un sous-espace stable d'une représentation, une sous-représentation, une représentation quotient, une représentation sous-quotient (quotient d'une sous-représentation ou, de manière équivalente, sous-représentation d'un quotient), une représentation simple (on rappelle que* $V = 0$ *n'est pas simple), et une représentation semi-simple (somme de représentations simples).*

Propriété 1.2.5. *La représentation* ρ *est semi-simple si et seulement si tout sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* V *admet un supplémentaire qui est aussi un sous-*$\mathfrak{g}$*-module.*

On note que tout sous-quotient d'une représentation semi-simple est semi-simple.

Remarque 1.2.6. *De la même manière que dans le cas des représentations de groupes, on a le lemme de Schur : si* V, W *sont deux* $\mathfrak{g}$*-modules simples, alors l'ensemble des* $\mathfrak{g}$*-morphismes de* V *dans* W *est de dimension* 1 *si* V *et* W *sont* $\mathfrak{g}$*-isomorphes, et nul sinon. En particulier, l'ensemble des* $\mathfrak{g}$*-endomorphismes de* V *est exactement* $\mathbb{C}\,\mathrm{id}_V$.

Définition 1.2.7. *Une* ***suite de Jordan-Hölder*** *de* V *est une suite* $(V_i)_{0 \le i \le n}$ *de sous-*$\mathfrak{g}$*-modules telle que* $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_n = 0$ *et telle que* V_i/V_{i+1} *est simple pour tout* $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Si $\dim(V)$ *est fini et non nul, alors* V *admet une suite de Jordan-Hölder.*

Définition 1.2.8. *On suppose que* $\dim(V)$ *est fini. On dit que* ρ *(ou le* $\mathfrak{g}$*-module* V*) est diagonalisable (resp. trigonalisable, strictement trigonalisable) si les éléments de* $\rho(\mathfrak{g})$ *sont simultanément diagonalisables (resp. trigonalisables, strictement trigonalisables).*

Propriété 1.2.9. *Les $\mathfrak{g}$-sous-quotients d'un $\mathfrak{g}$-module diagonalisable (resp. trigonalisable, strictement trigonalisble) sont diagonalisables (resp. trigonalisable, strictement trigonalisbles).*

Définition 1.2.10. *Un élément $v \in V$ est un **invariant** de ρ (ou de V) si $\rho(\mathfrak{g})v = 0$. On note $V^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des invariants de V.*

Propriété 1.2.11. *En passant par le cas simple, on montre que si ρ est semi-simple, V est alors somme directe des $\mathfrak{g}$-modules $V^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{Vect}(\rho(\mathfrak{g})(V))$.*

Définition 1.2.12. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

- *On note V_λ l'ensemble des $v \in V$ tels que v appartient au sous-espace propre de V (pour $\rho(x)$) associé à la valeur propre $\lambda(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$.*
- *On note V^λ l'ensemble des $v \in V$ tels que v appartient au sous-espace caractéristique de V (pour $\rho(x)$) associé à la valeur propre $\lambda(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$.*

Propriété 1.2.13. *En reprenant les notations précédentes,*

- *V_λ et V^λ sont des sous-espaces vectoriels stables par $\mathfrak{h}$,*
- *$V_\lambda \subset V^\lambda$,*
- *La somme des V^λ (et donc celle des V_λ) est directe.*

Définition 1.2.14. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, ρ_i une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V_i. On définit alors une représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\bigotimes_{i \in [\![1,n]\!]} V_i$ (le produit tensoriel est sur $\mathbb{C}$) par :*

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes \rho_i(x) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$$

où $\rho_i(x)$ est en $i^{\text{ème}}$ position (si $n = 0$, $\bigotimes_{i \in [\![1,n]\!]} V_i = \mathbb{C}$, et la représentation définie est triviale).

On peut donc en particulier définir la puissance tensorielle $n^{\text{ème}}$ de ρ que l'on note $\otimes^n \rho$ sur $\bigotimes^n V$. En faisant la somme directe des $\otimes^n \rho$, on définit alors une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{T}(V)$ (l'algèbre tensorielle de V), et donc par quotient une représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{S}(V)$, l'algèbre symétrique de V.

Notation 1.2.15. *On réservera la notation $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ à l'ensemble des invariants de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ vu comme $\mathfrak{g}$-module avec la représentation induite par la représentation adjointe.*

Définition 1.2.16. *Soient V, V' deux $\mathfrak{g}$-modules. On définit une représentation de $\mathfrak{g}$ sur l'ensemble $M = \mathrm{Hom}(V, V')$ des applications linéaires de V dans V' par*

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall u \in M, x_M(u) = x_{V'} \circ u - u \circ x_V$$

*En particulier, en prenant $V' = \mathbb{C}$ muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module trivial, on définit une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V^* par $\forall x \in \mathfrak{g}$, $x_{V^*} = -{}^{\mathrm{t}}x_V$, que l'on appelle **représentation duale** de ρ, et que l'on note ρ^*.*

*La représentation duale de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est appelée **représentation coadjointe** de $\mathfrak{g}$.*

Remarque 1.2.17. *$S(V^*)$, qui s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur V, a donc une structure de $\mathfrak{g}$-module.*

Propriété 1.2.18. *Si $(V_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie trigonalisables (resp. strictement trigonalisables), alors $\bigotimes_{k \in [\![1,n]\!]} V_k$ et V_i^* pour tout i sont trigonalisables (resp. strictement trigonalisables).*

Définition 1.2.19. *On suppose que ρ est de dimension finie. La forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathfrak{g}$ par $\forall x, y \in \mathfrak{g}, b(x,y) = \mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y))$ est appelée* ***forme bilinéaire symétrique associée à*** *ρ. Si $\rho = \mathrm{ad}$, on l'appelle la* ***forme de Killing*** de $\mathfrak{g}$ *et on la note* K.

Le $\mathfrak{g}$-morphisme ψ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ défini par $x \mapsto \mathrm{K}(x,\cdot)$ est appelé ***morphisme de Killing****. Le morphisme d'algèbres associatives de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ (qui est encore un $\mathfrak{g}$-morphisme) qui prolonge ψ est encore appelé morphisme de Killing.*

Propriété 1.2.20. *Soit b la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{g}$ associée à ρ. Alors on a :*

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g},\ b([x,y],z) = b(x,[y,z]).$$

Corollaire 1.2.21. *On reprend les notations précédentes. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{a}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour b est encore un idéal de $\mathfrak{g}$.*

2. Quelques algèbres de Lie particulières

Dans toute la suite, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sera de dimension finie.

2.1. Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes.

Certaines algèbres de Lie résolubles et nilpotentes apparaîtront de manière cruciale dans l'étude des algèbres de Lie semi-simples. Cette partie est inspirée de [2, chap. 1.3 et 1.4].

2.1.1. *Définitions, premières propriétés.*

Définition 2.1.1. *On définit par récurrence les suites décroissantes d'idéaux caractéristiques suivantes :*

- *$(\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}))_{i\geq 1}$ la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathcal{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathcal{C}^i(\mathfrak{g})]$.*
- *$(\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}))_{i\geq 0}$ la suite dérivée de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathcal{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}), \mathcal{D}^i(\mathfrak{g})]$.*

Propriété 2.1.2. *Pour tout $i \geq 0$, on a $\mathcal{D}^i(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.*

Proposition 2.1.3. *Sont équivalents :*

(1) il existe $k \geq 1$ tel que $\mathcal{C}^k(\mathfrak{g}) = 0$,
(2) il existe $k \geq 1$ tel que pour tous $x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, on a $[x_1,[x_2,[\ldots,[x_{k-1},x_k]\ldots]]] = 0$,
(3) il existe $k \geq 1$ et une suite décroissante $(\mathfrak{g}_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_k = 0$ et pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$.

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, on dit que $\mathfrak{g}$ est ***nilpotente****.*

Exemple 2.1.4.
- *Toute algèbre de Lie commutative est nilpotente.*
- *La sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n$ composée des matrices triangulaires supérieures strictes est nilpotente.*

Propriété 2.1.5. *Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente et non nulle, on a $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.*

Proposition 2.1.6. *Sont équivalents :*

(1) il existe $k \geq 0$ tel que $\mathcal{D}^k(\mathfrak{g}) = 0$,
(2) il existe $k \geq 0$ et une suite décroissante $(\mathfrak{g}_0)_{i\in[\![0,k]\!]}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_k = 0$ et pour tout $i \in [\![0,k-1]\!]$, $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$.

*Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, on dit que $\mathfrak{g}$ est **résoluble**.*

Exemple 2.1.7.
- *Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble (par 2.1.2).*
- *La sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}_n$ composée des matrices triangulaires supérieures est résoluble.*

Propriété 2.1.8.
- *Une sous-algèbre, une algèbre quotient d'une algèbre de Lie nilpotente (resp. résoluble) est nilpotente (resp. résoluble). Le produit de deux algèbres de Lie nilpotentes (resp. résolubles) est nilpotente (resp. résoluble).*
- *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ sont résolubles.*

Remarque 2.1.9. *La deuxième propriété est fausse dans le cas nilpotent. Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sl}_2$ la sous-algèbre de Lie engendrée par h et e (voir 1.1.9), et $\mathfrak{a}$ le sous-espace vectoriel engendré par e. Alors $\mathfrak{a}$ est bien un idéal de $\mathfrak{g}$, on a bien $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g} / \mathfrak{a}$ nilpotents (car de dimension 1), mais $\mathfrak{g}$ ne l'est pas, car pour tout $i \geq 2$, on a $\mathcal{C}^i(\mathfrak{g}) = \mathrm{Vect}(e)$.*

Proposition 2.1.10. *Soit $n = \dim \mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si il existe une suite décroissante de sous-algèbres de Lie $(\mathfrak{g}_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ telle que $\dim \mathfrak{g}_i = n - i$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ et $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.*

2.1.2. *Propriétés des algèbres de Lie résolubles.* À partir de maintenant et jusqu'à la fin de cette section, V est un espace vectoriel de dimension finie et ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V.

Lemme 2.1.11. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Alors V_λ est stable par $\rho(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Soient $v_0 \in V_\lambda$, $x \in \mathfrak{g}$, et $y \in \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $[y,x]$ appartient à $\mathfrak{a}$ et on a alors :

$$\rho(y)\rho(x)v_0 = \rho(x)\rho(y)v_0 + \rho([y,x])v_0 = \lambda(y)\rho(x)v_0 + \lambda([y,x])v_0$$

Il suffit donc de montrer que $\lambda([y,x]) = 0$.
Pour tout $i \geq 0$, soit $v_i = \rho(x)^i v_0$, et j le plus grand entier tel que $v_0, \ldots, v_j$ est une famille linéairement indépendante. Soit $V' = \mathrm{Vect}((v_i)_{i \in [\![0,j]\!]})$. Comme $v_{j+1} \in V'$, on a alors $\rho(x)(V') \subset V'$. On montre alors par récurrence sur $i \geq 0$ que pour tout $z \in \mathfrak{a}$:

$$\rho(z)v_i \in \lambda(z)v_i + \mathrm{Vect}((v_k)_{k \in [\![0,i-1]\!]})$$

Le cas $i = 0$ est évident, et si la propriété est satisfaite pour $i \geq 0$, par hypothèse de récurrence (appliquée deux fois), on a :

$$\begin{aligned}\rho(z)v_{i+1} = \rho(z)\rho(x)v_i &= \rho(x)\rho(z)v_i + \rho([z,x])v_i \\ &\in \rho(x)(\lambda(z)v_i + \mathrm{Vect}((v_k)_{k \in [\![0,i-1]\!]})) + \mathrm{Vect}((v_k)_{k \in [\![0,i]\!]}) \\ &\subset \lambda(z)v_{i+1} + \mathrm{Vect}((v_k)_{k \in [\![0,i]\!]})\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

On en déduit que V' est stable par $\rho(\mathfrak{a})$ et que $\lambda(y) = \dfrac{1}{j+1}\,\mathrm{tr}(\rho(y)_{|V'})$. Ainsi

$$\lambda([y,x]) = \frac{1}{j+1}\,\mathrm{tr}(\rho([y,x])_{|V'}) = \frac{1}{j+1}\,\mathrm{tr}(\rho(y)_{|V'}\rho(x)_{|V'} - \rho(x)_{|V'}\rho(y)_{|V'}) = 0$$

□

Théorème 2.1.12 (Théorème de Lie)**.** *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble, toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est trigonalisable.*

Démonstration. On raisonne par récurrence (forte) sur $\dim(\mathfrak{g})$, et le cas $\mathfrak{g} = 0$ est clair. On suppose le théorème vrai pour toute dimension inférieure strictement à n, et soit $\mathfrak{g}$ de dimension n. Raisonnons alors par récurrence sur $\dim V$. Par 2.1.10, il existe $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de codimension 1 (résoluble par 2.1.8). Par hypothèse de récurrence, si $V \neq 0$, il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que pour tout $y \in \mathfrak{a}$, il existe $\lambda(y) \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(y)v = \lambda(y)v$. On a alors $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, et ainsi $V_\lambda \neq 0$.

Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathbb{C}\, x$. Par 2.1.11, $\rho(x)V_\lambda \subset V_\lambda$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, $\rho(x)_{|V_\lambda}$ est trigonalisable, donc il existe un vecteur propre non nul $w \in V_\lambda$ pour $\rho(x)$. Finalement, w est un vecteur propre pour $\rho(\mathbb{C}\, x) + \rho(\mathfrak{a}) = \rho(\mathfrak{g})$. Il suffit alors de considérer la représentation ρ sur $V/\,\mathbb{C}\, w$ et lui appliquer l'hypothèse de récurrence. □

Corollaire 2.1.13. *Si $\mathfrak{g}$ est résoluble,*

- *Toute représentation simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1.*
- *La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une suite décroissante $(\mathfrak{g}_i)_{i \in [\![0, \dim \mathfrak{g}]\!]}$ d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g} - i$.*

2.1.3. *Propriétés des algèbres de Lie nilpotentes.*

Théorème 2.1.14. *$\mathfrak{g}$ est nilpotente si et seulement si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} x$ est nilpotent.*

Démonstration. $\Rightarrow$ vient de la définition d'une algèbre de Lie nilpotente 2.1.3 (2).

$\Leftarrow$: *Montrons d'abord que $\mathfrak{g}$ est résoluble.* Par l'absurde, on suppose que $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie résoluble de dimension maximale différente de $\mathfrak{g}$. Soit ρ la représentation de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ restriction de la représentation adjointe. Comme $\mathfrak{g}'$ est stable par $\rho(\mathfrak{g}')$, on peut considérer σ la représentation quotient de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}\,/\,\mathfrak{g}'$. On note $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,/\,\mathfrak{g}'$ l'application canonique. En tenant compte du fait que pour tout $x \in \mathfrak{g}'$, $\sigma(x)$ est nilpotent, par 2.1.12, il existe $y \in \mathfrak{g}$ tel que $\phi(y) \neq 0$ et $\sigma(\mathfrak{g}')\phi(y) = 0$. On a alors $y \notin \mathfrak{g}'$ et $[\mathfrak{g}', y] \subset \mathfrak{g}'$. Ainsi $\mathfrak{g}' + \mathbb{C}\, y$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que $[\mathfrak{g}' + \mathbb{C}\, y, \mathfrak{g}' + \mathbb{C}\, y] \subset \mathfrak{g}'$ et est donc résoluble, ce qui est absurde.

Soit $n = \dim \mathfrak{g}$. En appliquant 2.1.12 à la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, le $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$ est alors strictement trigonalisable, et donc pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}$, on a $(\operatorname{ad} x_1) \ldots (\operatorname{ad} x_n) = 0$, ce qui conclut par définition d'une algèbre de Lie nilpotente (2.1.3). □

Corollaire 2.1.15. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résoluble si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est nilpotente.*

Lemme 2.1.16.
- *Soit W un espace vectoriel de dimension finie. Si $x \in \mathfrak{gl}(W)$ est nilpotent (resp. diagonalisable), $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(W)} x$ aussi.*
- *Par conséquent, si $u \in \operatorname{End}(W)$, et $u = v + w$ sa décomposition de Jordan (c'est-à-dire v est diagonalisable, w est nilpotent et $[v, w] = 0$), alors la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(W)} u$ est $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(W)} u = \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(W)} v + \operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(W)} w$.*

Démonstration.
- *Cas x nilpotent :* pour tout $y \in \mathfrak{gl}(W)$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a
$$(\operatorname{ad} x)^m(y) = \sum_{i+j=m} (-1)^j \binom{m}{j} x^i y x^j,$$
donc si $x^n = 0$, alors $(\operatorname{ad} x)^{2n} = 0$.
- *Cas x diagonalisable :* choisissons une base de W telle que la matrice de x dans cette base soit $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (la matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$). On identifie

alors via cette base $\mathfrak{gl}(W)$ et $\mathfrak{gl}_n$. Notons alors $(E_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}_n$. On a alors pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$,

$$(\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(W)}\, x)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \tag{2}$$

et la matrice de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(W)}\, x$ est donc diagonale dans la base des E_{ij}.

□

Proposition 2.1.17. *Soit ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ dans V. Supposons que tout élément de $\rho(\mathfrak{g})$ soit nilpotent. Alors*

(1) $\rho(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie nilpotente,
(2) ρ est strictement trigonalisable.

Démonstration. (1) Pour tout $x \in \rho(\mathfrak{g})$, l'application $\mathrm{ad}_{\rho(\mathfrak{g})}\, x$ est la restriction à $\rho(\mathfrak{g})$ d'un morphisme nilpotent par 2.1.16, et est donc nilpotent. Par 2.1.14, $\rho(\mathfrak{g})$ est alors nilpotente.

(2) On peut quotienter $\mathfrak{g}$ par le noyau de ρ et obtenir une représentation σ injective, et alors $\mathfrak{g} / \ker \rho$ isomorphe à $\sigma(\mathfrak{g} / \ker \rho) = \rho(\mathfrak{g})$ est nilpotente donc résoluble, ce qui permet d'appliquer 2.1.12. Par conséquent, σ donc ρ est strictement trigonalisable.

□

Lemme 2.1.18. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. On suppose que ρ est simple et que tout élément de $\rho(\mathfrak{a})$ est nilpotent. Alors $\rho(\mathfrak{a}) = 0$.*

Démonstration. Soit $W = \{v \in V \mid \rho(\mathfrak{a})v = 0\}$. Par 2.1.17 (appliqué à $\rho_{|\,\mathfrak{a}}$), on a $W \neq 0$, et par 2.1.11 (appliqué à $0 \in \mathfrak{a}^*$), on a $\rho(\mathfrak{g})(W) \subset W$. Par simplicité de V, $V = W$. □

Théorème 2.1.19 (Théorème d'Engel)**.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V de dimension finie non nulle, $(V_0, \dots, V_n)$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module V. Sont équivalents :*

- *pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\rho(x)$ est nilpotent,*
- *pour tout $x \in \mathfrak{a}$ et tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho(x)(V_i) \subset V_{i+1}$.*

Démonstration.
- $\Leftarrow$: pour tout $x \in \mathfrak{a}$, on a $\rho(x)^n(V) = \rho(x)^n(V_0) = V_n = 0$.
- $\Rightarrow$: pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, soit ρ_i le sous-quotient de ρ, de $\mathfrak{g}$ dans V_i/V_{i+1}, qui est simple. Pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\rho(x)$, donc $\rho_i(x)$, est nilpotent, ainsi par 2.1.18, $\rho_i(\mathfrak{a}) = 0$ ce qui conclut.

□

Lemme 2.1.20. *Soit W un espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathfrak{gl}(W)$ tels que $(\mathrm{ad}\, u)^p v = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, le sous-espace caractéristique F^ξ de u correspondant à la valeur propre ξ est stable par v.*

Démonstration. Comme $\mathrm{ad}\, u = \mathrm{ad}(u - \xi\, \mathrm{id})$, on peut remplacer u par $u - \xi\, \mathrm{id}$ et donc supposer que $\xi = 0$. De là on raisonne par récurrence sur p. Si $p = 0$, le lemme est vrai. Si le lemme est prouvé pour $p-1$, soit $w = [u, v]$. On a alors $(\mathrm{ad}\, u)^{p-1} w = (\mathrm{ad}\, u)^p v = 0$, donc par hypothèse de récurrence, $w(F^0) \subset F^0$. D'autre part, un calcul direct montre que pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a :

$$[u^q, v] = \sum_{i+j=q-1} u^i w u^j \tag{3}$$

Par définition de F^0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n_{|F^0} = 0$. Si $q \geq 2n$, (3) restreinte à F^0 devient alors $u^q v_{|F^0} = 0$. Comme $F^0 = \{x \in V \mid \exists q \in \mathbb{N} : u^q(x) = 0\}$, on a $v(F^0) \subset F^0$. □

Théorème 2.1.21. *On suppose $\mathfrak{g}$ nilpotente. Soit ρ de $\mathfrak{g}$ dans V une représentation de dimension finie. Alors :*

- *$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} V^\lambda$ (dans la notation de 1.2.12, on prend ici $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$),*
- *pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, V^λ est stable par ρ,*
- *pour tout $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $((\rho(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id})_{|V^\lambda})_{x \in \mathfrak{g}}$ est strictement trigonalisable.*

Démonstration. On raisonne par récurrence (forte) sur $\dim V$. Si $V = 0$, le théorème est clair. On suppose alors que le théorème est vrai pour $\dim V < n$ et on suppose $\dim V = n$.

- *Si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\rho(x)$ a une unique valeur propre $\lambda(x)$*, d'après 2.1.12, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la matrice de $\rho(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id}$ par rapport à $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure stricte. En particulier, tous les $\rho(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$ ont un vecteur propre commun, ce qui implique que $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, et donc $V = V^\lambda$. Si $\mu \in \mathfrak{g}^*$ est tel que $V^\mu \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'espace caractéristique et donc l'espace propre associé à $\mu(x)$ est non nul, ce qui par hypothèse implique que $\mu(x) = \lambda(x)$. On a alors le théorème.
- *S'il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\rho(x)$ admet (au moins) deux valeurs propres distinctes*, en reprenant les notations de 2.1.20 (avec $u = \rho(x)$), par le lemme des noyaux, on a $V = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}} F^\xi$, avec $\dim F^\xi < n$ pour tout $\xi \in \mathbb{C}$. Comme pour tout $y \in \mathfrak{g}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on a $(\operatorname{ad}\rho(x))^p \rho(y) = \rho((\operatorname{ad} x)^p y)$, et comme par 2.1.14, $\operatorname{ad} x$ est nilpotente, on est bien dans les hypothèses de 2.1.20, et donc pour tout $\xi \in \mathbb{C}$, F^ξ est stable par $\rho(\mathfrak{g})$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence sur les sous-représentations de ρ sur les F^ξ.

On montre alors aisément que si le théorème est vrai pour des représentations ρ_i, il reste vrai pour $\bigoplus_i \rho_i$, ce qui conclut la démonstration. □

2.1.4. *Formes de Killing des algèbres nilpotentes et résolubles.*

Propriété 2.1.22. *La forme de Killing d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ est nulle.*

Démonstration. Par définition d'une algèbre de Lie nilpotente (2.1.3 (2)), $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ est nilpotent pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$. □

Lemme 2.1.23. *Soit $\mathfrak{k}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ dont on suppose que $\mathrm{tr}(xy) = 0$ pour tous $x, y \in \mathfrak{k}$. Alors tout élément de $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ est nilpotent.*

Démonstration. Soit $u \in [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$, et $u = v + w$ sa décomposition de Jordan (avec les mêmes notations que 2.1.16). Soient $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in \mathfrak{k}$ tels que $u = \sum_{i=1}^r [a_i, b_i]$. On identifie $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}_n$ par une base convenable, de sorte que v s'identifie à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- $\overline{v} := \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n})$ est un polynôme en v : en effet , $\overline{v} = P(v)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\overline{v}$ commute avec w, d'où $\overline{v}w$ est nilpotent et en particulier de trace nulle,
- Par l'équation (2) de la démonstration de 2.1.16, on a $(\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} \overline{v})E_{ij} = (\overline{\lambda_i - \lambda_j})E_{ij}$. Les matrices de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} v$ et $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} \overline{v}$ sont donc diagonales dans la base canonique et donc de même que précédemment, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} \overline{v}$ est un polynôme en $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} v$ donc en $\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} u$ par 2.1.16. Ainsi pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $[\overline{v}, a_i] = (\operatorname{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} \overline{v})a_i$ est dans $\mathfrak{k}$, et donc par hypothèse du lemme, $\mathrm{tr}([\overline{v}, a_i]b_i) = 0$, d'où

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_i = \mathrm{tr}(\overline{v}v) = \mathrm{tr}(\overline{v}u) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(\overline{v}a_ib_i - \overline{v}b_ia_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}([\overline{v}, a_i]b_i) = 0$$

Finalement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ donc $v = 0$ d'où $u = w$ est nilpotent. □

Théorème 2.1.24. *Sont équivalents :*

(1) $\mathfrak{g}$ *est résoluble,*
(2) $\mathrm{K}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$*,*
(3) $\mathrm{K}([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$*.*

Démonstration. On va montrer (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

- (1) $\Rightarrow$ (2) : par 2.1.12, il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tout $\mathrm{ad}\, x$ a sa matrice triangulaire supérieure. Ainsi, si $x, y, z \in \mathfrak{g}$, les matrices des $\mathrm{ad}[y, z] = \mathrm{ad}\, y\, \mathrm{ad}\, z - \mathrm{ad}\, z\, \mathrm{ad}\, y$ sont triangulaires supérieures strictes, et donc celles des $\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}[y, z]$ aussi. Finalement, on obtient $\mathrm{K}(x, [y, z]) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x\, \mathrm{ad}[y, z]) = 0$.
- (2) $\Rightarrow$ (3) est clair
- (3) $\Rightarrow$ (1) : soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{l} = \mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \{\mathrm{ad}\, z \mid z \in \mathfrak{g}\}$. Si $x, y \in [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, $x = \mathrm{ad}\, u$, $y = \mathrm{ad}\, v$ avec $u, v \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on a $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{K}(u, v) = 0$ et on est donc dans les hypothèses de 2.1.23. Tout élément de $\mathcal{D}^2(\mathfrak{l})$ est donc nilpotent, ainsi par 2.1.17 (1) (appliqué à ad de $\mathcal{D}^2(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}$), $\mathcal{D}^2(\mathfrak{l})$ est nilpotente donc résoluble, et $\mathfrak{l}$ est ainsi résoluble. Finalement, par 1.2.2, $\mathfrak{g} / \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{l}$ est résoluble, et $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est commutative donc résoluble, ainsi par 2.1.8, $\mathfrak{g}$ est résoluble.

□

2.1.5. *Radical et plus grand idéal nilpotent.*

Proposition 2.1.25. *Il existe un idéal résoluble de* $\mathfrak{g}$ *qui contient tous les autres. On l'appelle* ***radical*** *de* $\mathfrak{g}$*, et on le note* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$*.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale et $\mathfrak{b}$ un autre idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Montrons que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. La somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Par 2.1.8, on a $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) / \mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b} / (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ résoluble, et puisque $\mathfrak{a}$ est résoluble, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est un idéal résoluble, et donc par hypothèse sur $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, ce qui implique que $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. □

Proposition 2.1.26.
- *Si* $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ *sont des algèbres de Lie, on a* $\mathrm{rad}\left(\prod_i \mathfrak{g}_i\right) = \prod_i \mathrm{rad}(\mathfrak{g}_i)$*.*
- $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *est le plus petit idéal* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g} / \mathfrak{a}) = 0$*.*

Proposition 2.1.27. *Soit* $b(\cdot, \cdot)$ *la forme bilinéaire symétrique associée à* ρ*.*

(1) Il existe un plus grand idéal $\mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{g}$ *tel que* $\rho(x)$ *soit nilpotent pour tout* $x \in \mathfrak{n}$*. De plus si* $(V_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ *est une suite de Jordan-Hölder de* ρ *et si* ρ_i *est le sous-quotient de* ρ *agissant sur* V_i/V_{i+1}*, alors* $\mathfrak{n} = \bigcap_{i \in [\![0,n-1]\!]} \ker \rho_i$*.*
(2) $\mathfrak{n}$ *et* $\mathfrak{g}$ *sont orthogonaux pour* b*.*

L'idéal $\mathfrak{n}$ *est appelé* ***plus grand idéal de nilpotence de*** ρ*.*

Démonstration. (1) Par 2.1.19, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors sont équivalents :
(a) $\rho(x)$ est nilpotent pour tout $x \in \mathfrak{a}$
(b) $\mathfrak{a} \subset \bigcap_{i \in [\![0,n-1]\!]} \ker \rho_i$
ce qui conclut pour le premier point.

(2) Toujours par 2.1.19, si $x \in \mathfrak{n}$ et $y \in \mathfrak{g}$, on a $\rho(x)(V_i) \subset V_{i+1}$ et $\rho(y)(V_i) \subset V_i$ pour tout i, donc $(\rho(x)\rho(y))^n = 0$ et ainsi $\rho(x)\rho(y)$ est nilpotent, ce qui implique que $b(x, y) = 0$.

□

Proposition 2.1.28. *Le plus grand idéal de nilpotence de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Il est orthogonal à $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing.*

Démonstration. Montrons que si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{a}$ est nilpotente si et seulement si pour tout $x \in \mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est nilpotent. Le sens réciproque vient de 2.1.14. Pour le sens direct, soit $x \in \mathfrak{a}$. Par 2.1.14, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x$ est nilpotent. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x)^k = 0$. Comme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, on a $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x)^{k+1} = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\, x)^k \circ (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x) = 0$, ce qui conclut.

Ceci étant montré, la proposition découle alors de 2.1.27. □

2.2. **Algèbres de Lie semi-simples.** L'étude des algèbres de Lie semi-simples seront au centre de ce rapport. Cette partie est inspirée de [2, chap. 1.5 et 1.6].

2.2.1. *Définitions, premières propriétés.*

Définition 2.2.1. *On dit que $\mathfrak{g}$ est* ***simple*** *si $\dim \mathfrak{g} \geq 2$ et si les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ sont 0 et $\mathfrak{g}$.*

Lemme 2.2.2. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$, $\mathrm{K}_{\mathfrak{a}}$ les formes de Killing respectivement de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$. Alors $\mathrm{K}_{\mathfrak{a}} = (\mathrm{K}_{\mathfrak{g}})_{|\,\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$.*

Théorème 2.2.3. *Sont équivalents :*

(1) $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$,
(2) tout idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ est nul,
(3) la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ est non dégénérée.

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, on dit que $\mathfrak{g}$ est ***semi-simple****.*

Démonstration. On va montrer non (1) ⇒ non (2) ⇒ non (3) ⇒ non (1).

- non (1) ⇒ non (2) : si $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$, soit i le plus grand entier tel que $\mathcal{D}^i(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}))$ est non nul, ce dernier est alors commutatif. Si $x \in \mathfrak{g}$, la dérivation $\mathrm{ad}_{\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}}\, x$ laisse stable l'idéal caractéristique $\mathcal{D}^i(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}))$, et donc $\mathcal{D}^i(\mathrm{rad}(\mathfrak{g}))$ est un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$.
- non (2) ⇒ non (3) résulte de 2.1.28.
- non (3) ⇒ non (1) : soit $\mathfrak{g}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour la forme de Killing, avec $\mathfrak{g}^\perp \neq 0$. Alors $\mathfrak{g}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ par 1.2.21, de forme de Killing nulle par 2.2.2, et est donc résoluble par 2.1.24. Ainsi $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

□

Corollaire 2.2.4. *Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple, par 2.2.3* (2)*, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ est injective.*

Proposition 2.2.5. *Soient $(\mathfrak{g}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des algèbres de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ est semi-simple si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathfrak{g}_i$ l'est.*

Démonstration. Cela résulte de 2.2.3 (1) et de 2.1.26. □

Proposition 2.2.6. *On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{a}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^\perp$. En particulier, par 2.2.5, $\mathfrak{a}$ et $(\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{a}) \simeq \mathfrak{a}^\perp$ sont semi-simples.*

Démonstration. $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, de forme de Killing nulle par définition de $\mathfrak{a}^\perp$. Ainsi $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp$ est un idéal résoluble par 2.1.24, donc nul (2.2.3 (1)). Comme $\dim(\mathfrak{a})+\dim(\mathfrak{a}^\perp)=\dim\mathfrak{g}$, on a bien $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}^\perp$, et donc $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}^\perp$ puisque $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}^\perp]\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}^\perp=0$. □

Remarque 2.2.7. *Plus généralement, si l'on suppose seulement que* $\mathfrak{a}$ *ne contient pas d'idéal résoluble non nul de* $\mathfrak{g}$*, alors on a* $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}^\perp$ *(avec la même démonstration que précédemment).*

Proposition 2.2.8. *Soit* $\mathfrak{g}$ *semi-simple. Alors*

(1) $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$*,*
(2) toute dérivation de $\mathfrak{g}$ *est intérieure (voir 1.1.12).*

Démonstration. (1) Par 2.2.6, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est semi-simple, et commutative, donc nulle (par 2.2.3 (2)).
(2) Soit $D\in\mathfrak{d}_\mathfrak{g}$ et $\phi:\xi\in\mathbb{C}\mapsto\xi D$. On construit $\mathbb{C}\ltimes_\phi\mathfrak{g}$ le produit semi-direct (1.1.14), dont $\mathfrak{g}$ est un idéal. Par la remarque 2.2.7, on a $\mathbb{C}\ltimes_\phi\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\times\mathfrak{g}$ où $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathbb{C}\ltimes_\phi\mathfrak{g}$. Comme $\dim\mathfrak{h}=1$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est de la forme $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\cdot(1,x_0)$ avec $x_0\in\mathfrak{g}$. Alors pour tout $x\in\mathfrak{g}$, on a $[(1,x_0),(0,x)]=(0,D(x)+[x_0,x])=0$, donc $D(x)+[x_0,x]=0$, c'est-à-dire $D=\mathrm{ad}(-x_0)$.

□

Théorème 2.2.9. $\mathfrak{g}$ *est semi-simple si et seulement si elle est produit d'algèbres de Lie simples.*

Démonstration.
- $\Leftarrow$: il suffit de montrer qu'une algèbre de Lie simple est semi-simple, et on conclut par 2.2.5. Soit $\mathfrak{g}$ simple, et $\mathfrak{a}$ un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$. Par l'absurde, on suppose que $\mathfrak{a}\neq 0$. Alors $\mathfrak{a}=\mathfrak{g}$. Mais alors $\mathfrak{g}$ est commutative, et donc tout sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Comme $\dim\mathfrak{g}\geq 2$, cela contredit la simplicité de $\mathfrak{g}$.
- $\Rightarrow$: soit $\mathfrak{g}$ semi-simple. Si les seuls idéaux de $\mathfrak{g}$ sont 0 et $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est simple. Sinon, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ différent de 0 et $\mathfrak{g}$. On a par 2.2.6 $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}^\perp$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^\perp$ sont semi-simples de dimension strictement inférieure à $\dim\mathfrak{g}$, et on raisonne alors par récurrence.

□

Proposition 2.2.10. *Soit* $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_1\times\ldots\times\mathfrak{a}_n$ *où les* $\mathfrak{a}_i$ *sont des algèbres de Lie simples. Alors les idéaux de* $\mathfrak{g}$ *sont exactement les produits de certains des* $\mathfrak{a}_i$*.*

Remarque 2.2.11. *Par 2.2.3* (3)*, si* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, les morphismes de Killing* $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^*$ *et* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})\to\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ *sont des* $\mathfrak{g}$*-isomorphismes (voir 1.2.19). On pourra ainsi identifier* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}^*$, $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$.

2.2.2. *Algèbres de Lie semi-simples et représentations.* On considère toujours ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ dans V.

Définition 2.2.12. *Soit* k *un corps,* b *une forme bilinéaire non dégénérée sur un* k*-espace vectoriel* U*, et* $B=(x_1,\ldots,x_l)$ *une base de* U*. On appelle ici* ***base duale*** *de* B *relativement à* b *la base* $B^*=(x_1^*,\ldots,x_l^*)$ *de* U *définie par* $b(x_i,x_j^*)=\delta_{ij}$ *pour tous* i,j*.*

Lemme 2.2.13. *On suppose que* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, et que* ρ *est une représentation simple et injective. Si* b *est la forme bilinéaire associée à* ρ*, alors* b *est non dégénérée, de plus si* $(x_1,\ldots,x_n)$ *est une base de* $\mathfrak{g}$ *et* $(x_1^*,\ldots,x_n^*)$ *la base duale de* $(x_1,\ldots,x_n)$ *relativement à* b*, on a* $\sum_{i\in[\![1,n]\!]}\rho(x_i)\rho(x_i^*)=\dfrac{\dim\mathfrak{g}}{\dim V}\,\mathrm{id}$.

Démonstration. • Soit $\mathfrak{g}^{\perp_b}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}$ pour b, qui est un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour tous $x, y \in \mathfrak{g}^{\perp_b}$, on a $\mathrm{tr}(\rho(x)\rho(y)) = 0$. Ainsi tout élément de $\rho([\mathfrak{g}^{\perp_b}, \mathfrak{g}^{\perp_b}])$ est nilpotent (2.1.23). Comme ρ est injective, par 2.1.17 (1), $[\mathfrak{g}^{\perp_b}, \mathfrak{g}^{\perp_b}]$ est nilpotente donc résoluble, d'où $\mathfrak{g}^{\perp_b}$ est résoluble donc nulle puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

- Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on pose $[x, x_i] = \sum_j \lambda_{ij} x_j$ et $[x, x_i^*] = \sum_j \mu_{ij} x_j^*$. Par 1.2.20, on a alors
$$\lambda_{ij} = b([x, x_i], x_j^*) = -b(x_i, [x, x_j^*]) = -\mu_{ji}$$
et donc
$$\begin{aligned}\left[\rho(x), \sum_i \rho(x_i)\rho(x_i^*)\right] &= \sum_i \rho([x, x_i])\rho(x_i^*) + \sum_i \rho(x_i)\rho([x, x_i^*]) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}\rho(x_j)\rho(x_i^*) + \sum_{i,j} \mu_{ij}\rho(x_i)\rho(x_j^*) = 0\end{aligned}$$
Ainsi $\sum_i \rho(x_i)\rho(x_i^*)$ est un $\mathfrak{g}$-endomorphisme de V. Comme V est simple, par le lemme de Schur, $\sum_i \rho(x_i)\rho(x_i^*) = \xi\,\mathrm{id}$ pour un certain $\xi \in \mathbb{C}$, avec
$$(\dim V)\xi = \mathrm{tr}\left(\sum_i \rho(x_i)\rho(x_i^*)\right) = \sum_i b(x_i, x_i^*) = \dim \mathfrak{g}$$

□

Lemme 2.2.14 (Premier lemme de Whitehead). *On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soit $f : \mathfrak{g} \to V$ une application linéaire. Alors sont équivalents :*

(1) $\forall x, y \in \mathfrak{g}, f([x, y]) = \rho(x)f(y) - \rho(y)f(x)$
(2) $\exists v \in V, \forall x \in \mathfrak{g}, f(x) = \rho(x)v$

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (1) résulte d'un calcul simple. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), on procède en plusieurs étapes.

- *Si ρ est simple et injective*, avec les notations de 2.2.13 (et de sa démonstration), on vérifie que $v = \dfrac{1}{\xi}\sum_i \rho(x_i)f(x_i^*)$ convient. En effet, on a pour tout $x \in \mathfrak{g}$,
$$\begin{aligned}\xi(\rho(x)v - f(x)) &= \sum_i \rho(x)\rho(x_i)f(x_i^*) - \sum_i \rho(x_i)\rho(x_i^*)f(x) \\ &= \sum_i [\rho(x), \rho(x_i)]f(x_i^*) + \rho(x_i)f([x, x_i^*]) \\ &= \sum_{i,j} \lambda_{ij}\rho(x_j)f(x_i^*) + \sum_{i,j} \mu_{ij}\rho(x_i)f(x_j^*) = 0\end{aligned}$$
- *Si on suppose ρ simple mais plus nécessairement injective*, par 2.2.6, il existe un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{g} = \ker\rho \times \mathfrak{b}$ où $\ker\rho$ et $\mathfrak{b}$ sont semi-simples. La représentation $\rho_{|\mathfrak{b}}$ est injective donc par ce qui précède, il existe $v \in V$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{b}$, $f(x) = \rho(x)v$. D'après (1), puisque $\ker\rho$ est semi-simple, par 2.2.8, on a $f([\ker\rho, \ker\rho]) = f(\ker\rho) = 0$, donc (2) est vérifié sur $\ker\rho$ et sur $\mathfrak{b}$ donc sur $\mathfrak{g}$.
- *Dans le cas général*, on raisonne par récurrence sur $\dim V$. Si ρ n'est pas simple, soit W un sous-$\mathfrak{g}$-module strict de V non nul. Soit $\phi : V \to V/W$ l'application canonique. Appliquant l'hypothèse de récurrence à $\phi\circ f$ sur la représentation quotient de ρ sur V/W, il existe alors $v \in V$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\phi(f(x)) = \phi(\rho(x)v)$. Soit alors f_1 définie par $\forall x \in \mathfrak{g}, f_1(x) = f(x) - \rho(x)v$. L'application linéaire f_1 est alors à valeurs dans W et vérifie

bien (1) (avec la sous-représentation de ρ sur W), et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, on obtient alors $v_1 \in W$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $f_1(x) = \rho(x)v_1$, et donc $f(x) = \rho(x)(v + v_1)$.

$\square$

Théorème 2.2.15 (Théorème de Weyl)**.** *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple si et seulement si toute représentation de dimension finie de* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Démonstration.

- $\Leftarrow$: on a alors en particulier la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ semi-simple. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$, on a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ où $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Si $\mathfrak{a} \neq 0$, $\mathfrak{g}$ a alors un idéal de codimension 1 (de la forme $\mathfrak{a}' \times \mathfrak{b}$ où $\mathfrak{a}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}$ de codimension 1), donc il existe $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ des idéaux tels que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ avec $\dim \mathfrak{a}_1 = 1$. Or $\mathfrak{a}_1$, donc $\mathfrak{g}$, admet des représentations non semi-simples (si $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{C}\,x$, soit σ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que la matrice de $\sigma(x)$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors σ n'est pas semi-simple, puisque le seul sous-module de dimension 1 est $\mathbb{C}(1,0)$), ce qui est absurde. Ainsi $\mathfrak{a} = 0$ et $\mathfrak{g}$ est semi-simple.
- $\Rightarrow$: soit V l'espace de la représentation ρ et U un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, on veut montrer qu'il admet un sous-$\mathfrak{g}$-module supplémentaire. Soit $\phi : V \to V/U$ l'application linéaire canonique, τ la représentation quotient de ρ sur V/U, $L = \mathrm{Hom}(V/U, V)$, et $M = \mathrm{Hom}(V/U, U) \subset L$. On définit alors une représentation λ de $\mathfrak{g}$ dans L par

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \forall l \in L, \forall w \in V/U, (\lambda(x)(l))(w) = (\rho(x) \circ l)(w) - (l \circ \tau(x))(w)$$

M est un sous-$\mathfrak{g}$-module de L pour cette représentation, et on note μ la sous-représentation correspondante.

Soient $l_0 \in L$ telle que $\phi \circ l_0 = \mathrm{id}_{V/U}$, et $f : x \in \mathfrak{g} \mapsto \lambda(x)(l_0) \in L$. Pour tout $w \in V/U$, on a

$$\phi((\lambda(x)(l_0))(w)) = (\phi \circ \rho(x) \circ l_0)(w) - (\phi \circ l_0 \circ \tau(x))(w) = (\tau(x) \circ \phi \circ l_0)(w) - (\phi \circ l_0 \circ \tau(x))(w) = 0$$

d'où $\mathrm{im}(f) \subset M$. Ainsi par 2.2.14 (2) $\Rightarrow$ (1), on a pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$f([x,y]) = \lambda(x)f(y) - \lambda(y)f(x) = \mu(x)f(y) - \mu(y)f(x)$$

et donc par 2.2.14 (1) $\Rightarrow$ (2), il existe $m_0 \in M$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $f(x) = \mu(x)(m_0)$. Finalement pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\rho(x) \circ (l_0 - m_0) - (l_0 - m_0) \circ \tau(x) = \lambda(x)(l_0 - m_0) = 0$$

et donc $n_0 = l_0 - m_0$ est un $\mathfrak{g}$-morphisme de V/U dans V. Comme $\phi \circ n_0 = \phi \circ l_0 = \mathrm{id}_{V/U}$, $n_0(V/U)$ est alors un supplémentaire de U qui est aussi un sous-$\mathfrak{g}$-module de V.

$\square$

Remarque 2.2.16. *Il faut faire attention à ce que* $\mathfrak{g}$ *semi-simple n'équivaut pas à* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ *semi-simple. Le sens direct est vrai, mais le sens réciproque est faux (voir 2.3.2).*

Ce théorème important sur les algèbres de Lie semi-simples entraîne le théorème important de Lévi-Malcev (mais pas seulement). La démonstration étant assez technique, ce théorème, bien qu'utile, sera donc admis.

Théorème 2.2.17 (Théorème de Lévi-Malcev (admis))**.** *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie. Il existe une sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{s}$ *de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *(voir* [2, 1.6.9]*)*

Remarque 2.2.18.
- *En accord avec les notations fixées en 1.1.5, en général,* $\mathfrak{g}$ *n'est pas l'algèbre produit de* $\mathfrak{s}$ *et de* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$*, car en général,* $[\mathfrak{s}, \mathrm{rad}(\mathfrak{g})] \neq 0$*. Le point important du théorème est le fait que* $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ ***admet un supplémentaire dans*** $\mathfrak{g}$ ***qui est une algèbre de Lie****.*
- *Par 2.1.26 et 2.2.3* (1)*,* $\mathfrak{s} \simeq \mathfrak{g} / \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ *est semi-simple.*

2.2.3. *Éléments semi-simples et nilpotents d'une algèbre de Lie semi-simple.* On peut définir l'analogue de la décomposition de Jordan pour des algèbre de Lie semi-simples.

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, un endomorphisme de $\mathfrak{gl}(V)$ est *semi-simple* si et seulement si il est *diagonalisable.* S'ils qualifient un endomorphisme de $\mathfrak{gl}(V)$, les deux termes seront synonymes dans toute la suite.

Proposition 2.2.19. *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie semi-simple de* $\mathfrak{gl}(V)$*. Si* $x \in \mathfrak{h}$*, et* $x = y + z$ *est la décomposition de Jordan dans* $\mathfrak{gl}(V)$*, alors* $y, z \in \mathfrak{h}$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V stables par $\mathfrak{h}$. Pour $W \in \mathcal{V}$, on note $\mathfrak{h}_W = \left\{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid x(W) \subset W \text{ et } \mathrm{tr}(x_{|W}) = 0\right\}$, qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ et qui contient $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{h}_* = \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{h}) \cap (\bigcap_{W \in \mathcal{V}} \mathfrak{h}_W)$.

- Si $x \in \mathfrak{h}_*$, soient d, n ses composantes diagonalisables et nilpotentes. Comme ce sont des polynômes en x, ils stabilisent tout $W \in \mathcal{V}$ et $\mathrm{tr}(n_{|W}) = 0$ (car n est nilpotente), donc $\mathrm{tr}(d_{|W}) = \mathrm{tr}(x_{|W}) - \mathrm{tr}(n_{|W}) = 0$, d'où $d, n \in \bigcap_{W \in \mathcal{V}} \mathfrak{h}_W$. De plus, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} d$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} n$ sont les composantes diagonalisables et nilpotentes de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$ (2.1.16), donc $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} d$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} n$ sont des polynômes en $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} x$, ce qui implique que $d, n \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{h})$. Finalement, $d, n \in \mathfrak{h}_*$.
- On conclut en montrant que $\mathfrak{h}_* = \mathfrak{h}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est un idéal semi-simple de $\mathfrak{h}_* \subset \mathfrak{n}_{\mathfrak{gl}(V)}(\mathfrak{h})$, donc par 2.2.7, il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{h}_* = \mathfrak{h} \times \mathfrak{a}$. Soient alors $a \in \mathfrak{a}$, et W un élément minimal de $\mathcal{V} \setminus \{0\}$, W est alors un $\mathfrak{h}$-module simple et a (qui commute avec $\mathfrak{h}$) un $\mathfrak{h}$-morphisme. Par lemme de Schur, $a_{|W}$ est donc scalaire, et de trace nulle par définition de $\mathfrak{h}_*$, d'où $a_{|W} = 0$. L'action de $\mathfrak{h}$ sur V étant semi-simple (2.2.15), V est somme directe d'éléments minimaux de $\mathcal{V} \setminus \{0\}$, et donc $a = 0$, d'où $\mathfrak{a} = 0$.

□

Corollaire 2.2.20. *On reprend les notations de 2.2.19. Un élément* $x \in \mathfrak{h}$ *est semi-simple (resp. nilpotent) si et seulement si* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} x$ *l'est.*

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{h}$, d, n les composantes semi-simples et nilpotentes de x (qui sont dans $\mathfrak{h}$ par 2.2.19). Par 2.1.16, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} d$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} n$ (qui sont bien dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$) sont alors les composantes semi-simples et nilpotentes de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} x$. Comme $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ est injective, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} n$ (resp. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}} d$) est nul si et seulement si n (resp. d) est nul. □

Théorème 2.2.21. *On suppose* $\mathfrak{g}$ *semi-simple. Soit* $x \in \mathfrak{g}$*. Sont équivalents :*

(1) $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ *est un endomorphisme semi-simple (resp. nilpotent),*
(2) il existe une représentation σ *injective de dimension finie de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\sigma(x)$ *est semi-simple (resp. nilpotent),*
(3) pour toute représentation τ *de dimension finie de* $\mathfrak{g}$*,* $\tau(x)$ *est semi-simple (resp. nilpotent).*

Si $x \in \mathfrak{g}$ vérifie ces conditions équivalentes, on dit que x est semi-simple (resp. nilpotent).

Tout élément $x \in \mathfrak{g}$ admet une unique décomposition $x = d + n$ où $d \in \mathfrak{g}$ est semi-simple et $n \in \mathfrak{g}$ est nilpotent, et $[d, n] = 0$, dite décomposition de Jordan. On dit que d est la ***composante semi-simple*** *de x et n est la* ***composante nilpotente*** *de x.*

Démonstration. On montre d'abord que (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3).

- (3) $\Rightarrow$ (2) est clair,
- (2) $\Rightarrow$ (1) : soit V l'espace vectoriel sur lequel agit σ. Alors $\sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ est semi-simple, donc par 2.2.20, $\operatorname{ad}_{\sigma(\mathfrak{g})} \sigma(x)$ est semi-simple (resp. nilpotent), donc il existe une base $(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n))$ de $\sigma(\mathfrak{g})$ sur laquelle $\operatorname{ad}_{\sigma(\mathfrak{g})} \sigma(x)$ est diagonale (resp. trigonale supérieure stricte). Alors $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ est diagonale (resp. trigonale supérieure stricte) sur la base $(x_1, \dots, x_n)$,
- (1) $\Rightarrow$ (3) : soit τ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} / \ker \tau$, τ' la représentation déduite par passage au quotient, et $\overline{x}$ l'image de x dans $\mathfrak{g}'$. Alors $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'} \overline{x}$ est toujours semi-simple (resp. nilpotent), d'où $\operatorname{ad}_{\tau'(\mathfrak{g}')} \tau'(\overline{x})$ aussi, donc d'après 2.2.20, $\tau'(\overline{x}) = \tau(x)$ est semi-simple (resp. nilpotent).

Si $x \in \mathfrak{g}$, comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ est injective donc $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Par 2.2.19, il existe alors $d, n \in \mathfrak{g}$ uniques tels que $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x = \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} d + \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n$ soit la décomposition de Jordan de $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ (avec $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} d$ diagonalisable et $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n$ nilpotent). Alors $x = d + n$ est bien l'unique décomposition de x en une partie semi-simple d et une partie nilpotente n. □

Propriété 2.2.22. *On suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple. Soient $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ semi-simple, $x = d + n$ la décomposition de Jordan de $x \in \mathfrak{h}$ relativement à $\mathfrak{g}$. Alors $d, n \in \mathfrak{h}$.*

Démonstration. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ est injective, et comme $\mathfrak{h}$ est aussi semi-simple, l'algèbre de Lie $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est semi-simple. Ainsi, par 2.2.19, on a $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} d, \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n \in \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{h}$, d'où $d, n \in \mathfrak{h}$. □

2.3. **Algèbres de Lie réductives.** Cette partie est inspirée de [2, chap. 1.7].

2.3.1. *Radical nilpotent d'une algèbre de Lie.*

Proposition 2.3.1 (admise)**.** *Soit $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a}_1$ l'intersection des noyaux des représentations simples de dimension finie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_2$ l'intersection des plus grands idéaux de nilpotence des représentations de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \cap \mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, et en particulier, $\mathfrak{a}_1$ est nilpotent (voir* [2, 1.7.1]*).*

$\mathfrak{a}_1$ est appelé le ***radical nilpotent*** *de $\mathfrak{g}$.*

2.3.2. *Algèbres de Lie réductives.* Les algèbres de Lie réductives étendent d'une certaine manière les algèbres de Lie semi-simples.

Proposition 2.3.2 (admise)**.** *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$. Sont équivalents :*

(1) $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$ *est semi-simple,*
(2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ *où $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple et $\mathfrak{g}_2$ est commutative,*
(3) $\mathfrak{g}$ *admet une représentation de dimension finie de forme bilinéaire associée non dégénérée,*
(4) $\mathfrak{g}$ *admet une représentation injective semi-simple de dimension finie,*

(5) $\mathfrak{n} = 0$,
(6) $\mathfrak{r} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

*Si $\mathfrak{g}$ vérifie ces conditions équivalentes, on dit que $\mathfrak{g}$ est **réductive** (voir* [2, 1.7.3]*).*

Remarque 2.3.3. *En reprenant les notations de 2.3.2, si $\mathfrak{g}$ est réductive, on a $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. En effet, la première égalité résulte d'un calcul direct, $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est clair, et si $x \in \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, alors $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) = 0$.*

Proposition 2.3.4. *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ où $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple et $\mathfrak{g}_2$ est commutative, et ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ sur V. Alors ρ est semi-simple si et seulement si pour tout $y \in \mathfrak{g}_2$, $\rho(y)$ est semi-simple.*

Démonstration.

- $\Rightarrow$: si ρ est simple, pour tout $y \in \mathfrak{g}_2$, $\rho(y)$ est un $\mathfrak{g}$-morphisme, donc par lemme de Schur est scalaire. De là on déduit le cas général.
- $\Leftarrow$: par 2.1.21, on a $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}_2^*} V^\lambda$. Pour tout $y \in \mathfrak{g}_2$, on a $\rho(y)_{|V^\lambda}$ trigonalisable de seule valeur propre $\lambda(y)$ (2.1.21), et aussi par hypothèse, semi-simple. Ainsi $\rho(y)_{|V^\lambda}$ est scalaire, et $\rho_{|\,\mathfrak{g}_2}$ est semi-simple. Comme $\rho_{|\,\mathfrak{g}_1}$ est aussi semi-simple (2.2.15), on conclut.

□

2.3.3. *Algèbres de Lie réductives dans $\mathfrak{g}$.* On étudiera par la suite certaines sous-algèbres de Lie réductives dans une algèbre de Lie semi-simple.

Définition 2.3.5. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{h}$ est **réductive dans** $\mathfrak{g}$ si $x \in \mathfrak{h} \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est une représentation semi-simple.*

Remarque 2.3.6. *Si $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$, la sous-représentation $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}$ est semi-simple, d'où $\mathfrak{h}$ est réductive.*

Proposition 2.3.7. *On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soit K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ telle que :*

- *$K_{|\,\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ est non dégénérée, et*
- *$\mathfrak{h}$ contient les composantes semi-simples et nilpotentes (relativement à $\mathfrak{g}$) de ses éléments.*

Alors $\mathfrak{h}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Par 2.3.2 (3), $\mathfrak{h}$ est réductive. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est semi-simple pour tout $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ (2.3.4). Soit $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$, s, n les composantes semi-simple et nilpotente de x. Par hypothèse, $n \in \mathfrak{h}$. Puisque $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n$ est un polynôme en $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ sans terme constant, on a $n \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h})$. Donc si $y \in \mathfrak{h}$, alors n et y commutent d'où $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, y$ est nilpotent, et ainsi $\mathrm{K}(n, y) = 0$, et donc par hypothèse, $n = 0$. Finalement $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ est semi-simple. □

Proposition 2.3.8. *On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. Soient $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie réductive dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Alors :*

- *$\mathrm{K}_{|\,\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}}$ est non dégénérée,*
- *$\mathfrak{m}$ contient les composantes semi-simples et nilpotentes (relativement à $\mathfrak{g}$) de ses éléments,*
- *$\mathfrak{m}$ est réductive dans $\mathfrak{g}$,*
- *$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$ étant l'orthogonal de $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. $\mathfrak{a}$ étant réductive dans $\mathfrak{g}$, par 1.2.11, on a bien $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]$. Comme $[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}] = 0$, on a $\mathrm{K}([\mathfrak{g}, \mathfrak{a}], \mathfrak{m}) = \mathrm{K}(\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{m}]) = 0$, et donc $\mathfrak{m}$ et $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ sont orthogonaux et en particulier, $\mathrm{K}_{|\,\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}}$ est non dégénérée. Soit $x \in \mathfrak{m}$, d, n ses composantes semi-simples et nilpotentes. Comme $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n$ est un polynôme en $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ sans terme constant, on a $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, n)(\mathfrak{a}) = 0$. Ainsi n (et donc d) appartiennent à $\mathfrak{m}$. Autrement dit, $\mathfrak{m}$ contient les composantes semi-simples et nilpotentes (relativement à $\mathfrak{g}$) de ses éléments. Finalement, $\mathfrak{m}$ est bien réductive dans $\mathfrak{g}$ (2.3.7). □

Proposition 2.3.9. *Le produit tensoriel d'un nombre fini de représentations semi-simples de dimension finie de* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Démonstration. On peut se restreindre à des représentations simples ρ_i. Soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{g}$, contenu dans $\bigcap_i \ker \rho_i$. Si ρ est une représentation de $\mathfrak{g}$, on note $\overline{\rho}$ la représentation de $\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{n}$ induite par ρ. Par 2.3.2 (5), $\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{n}$ est réductive, et on note $\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{n} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ où $\mathfrak{g}_1$ est semi-simple et $\mathfrak{g}_2$ est commutative. Alors $\overline{\rho_i}(\mathfrak{g}_2)$ commute avec $\overline{\rho_i}(\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{n})$ pour tout i, donc est composé d'endomorphismes scalaires (par le lemme de Schur), donc $\left(\bigotimes_i \overline{\rho_i}\right)(\mathfrak{g}_2)$ aussi, ce qui conclut par 2.3.4. □

Proposition 2.3.10. *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie réductive dans* $\mathfrak{g}$, *et* ρ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *dans* V *(non nécessairement de dimension finie). Alors :*

(1) La somme W *des sous-*$\mathfrak{h}$*-modules simples de dimension finie de* V *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* V*.*
(2) Si ρ *est semi-simple de dimension finie,* $\rho_{|\,\mathfrak{h}}$ *aussi.*

Démonstration. (1) Soit W_0 un sous-$\mathfrak{h}$-module simple de dimension finie de V, et montrons que $\rho(\mathfrak{g})(W_0) \subset W$. On considère $\mathfrak{g}$ comme étant un $\mathfrak{h}$-module avec la représentation $x \in \mathfrak{h} \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$. Alors $\mathfrak{g} \otimes W_0$ est un $\mathfrak{h}$-module semi-simple par 2.3.9. Soit θ l'application linéaire de $\mathfrak{g} \otimes W_0$ dans V telle que : $\forall x \in \mathfrak{g}, \forall w \in W_0, \theta(x \otimes w) = \rho(x)(w)$. On vérifie que θ est un $\mathfrak{h}$-morphisme. Donc $\theta(\mathfrak{g} \otimes W_0)$ est un sous-$\mathfrak{h}$-module semi-simple de dimension finie de V, d'où $\rho(\mathfrak{g})(W_0) = \theta(\mathfrak{g} \otimes W_0) \subset W$, ce qui montre le premier point.
(2) Si ρ est simple de dimension finie, comme $W \neq 0$ (toute représentation de dimension finie d'une algèbre de Lie admettant une sous-représentation simple), on a $W = V$, ce qui permet de conclure.

□

2.4. **Étude des $\mathfrak{sl}_n$.** Cette partie est inspirée de [4, chap 20.2] et de [2, chap. 1.8].

2.4.1. *Semi-simplicité de* $\mathfrak{sl}_n$.

Lemme 2.4.1. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(V)$ *avec* V *un espace vectoriel de dimension finie. Si* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ *et* V *est un* $\mathfrak{g}$*-module simple, alors* $\mathfrak{g}$ *est semi-simple.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$, et S la sous-algèbre associative de $\mathrm{End}(V)$ engendrée par $\mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a}$ est abélien, on a $[\mathfrak{a}, S] = 0$, donc pour tous $x \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$, on a :

$$\mathrm{tr}([x, a]s) = \mathrm{tr}(xas - axs) = \mathrm{tr}(xas - xsa) = \mathrm{tr}(xas - xas) = 0.$$

Comme $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, on a en particulier $\mathrm{tr}(y^n) = 0$ pour tout $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi tout élément de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ est nilpotent et donc par 2.1.18, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = 0$, d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$, ce qui conclut. □

Corollaire 2.4.2. *Pour tout espace vectoriel V de dimension finie, $\mathfrak{sl}(V)$ est une algèbre de Lie semi-simple.*

Démonstration. On a $\mathfrak{z}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_V$ et donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{sl}(V)) = 0$. Comme $\mathfrak{gl}(V) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_V \times \mathfrak{sl}(V)$, tout sous-$\mathfrak{sl}(V)$-module de V est un sous-$\mathfrak{gl}(V)$-module de V ; puisque V est un $\mathfrak{gl}(V)$-module simple, V est un $\mathfrak{sl}(V)$-module simple. On applique alors 2.4.1. □

2.4.2. *Représentations de $\mathfrak{sl}_2$.* L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$ est un exemple fondamental d'algèbre de Lie, qui reviendra par la suite. Cette partie sera alors cruciale.

On rappelle que $\mathfrak{sl}_2$ est l'espace vectoriel formé des matrices 2×2 de trace nulle, qui est engendré par

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifiant $[e,f] = h$, $[h,e] = 2e$, $[h,f] = -2f$.

Proposition 2.4.3. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit ρ_r une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ dans $\mathbb{C}^{r+1}$ par :*

$$\rho_r(h) = \begin{pmatrix} r_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & r_r \end{pmatrix}, \qquad \rho_r(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_r(e) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \mu_r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où $r_i = r - 2i$ et $\mu_i = i(r-i+1)$. Alors ρ_r est simple.

Démonstration. Soit $(e_1, \ldots, e_{r+1})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{r+1}$. Soit W un sous-$\mathfrak{sl}_2$-module non nul de $\mathbb{C}^{r+1}$, et $w \in W \setminus \{0\}$. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho_r(f))^k(w) \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}) \setminus \{0\}$. Ainsi $e_{r+1} \in W$ et $e_i = \dfrac{1}{\mu_i \ldots \mu_r}(\rho_r(e))^{r+1-i}(e_{r+1}) \in W$ pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$, d'où $W = \mathbb{C}^{r+1}$. □

Lemme 2.4.4. *Soient ρ une représentation de $\mathfrak{sl}_2$ dans V, $\mu \in \mathbb{C}$, $v_0 \in V$ tels que $\rho(h)(v_0) = \mu v_0$.*

(1) On a
- $\rho(h)\rho(e)(v_0) = (\mu+2)\rho(e)(v_0)$
- $\rho(h)\rho(f)(v_0) = (\mu-2)\rho(f)(v_0)$

(2) Soit pour tout $i \in \mathbb{N}$, $v_i = \rho(f)^i(v_0)$ (et on pose $v_{-1} = 0$). Si $\rho(e)(v_0) = 0$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\rho(e)(v_i) = i\,(\mu - i + 1)\,v_{i-1}$.

Démonstration. Cela se montre par des calculs directs (par récurrence pour (2)). □

Théorème 2.4.5. *Toute représentation simple ρ de $\mathfrak{sl}_2$ de dimension $r+1$ est équivalente à ρ_r.*

Démonstration. Soit V l'espace de la représentation ρ.

(1) Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il existe $v \in V \setminus \{0\}$ vecteur propre de $\rho(h)$. Soit λ la valeur propre associée à v. Par 2.4.4 (1), on a $\rho(h)\rho(e)^i(v) = (\lambda + 2i)\rho(e)^i(v)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme $\rho(h)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, soit i_0 le plus grand entier i tel que $\rho(e)^i(v) \neq 0$. Soit $v_0 = \rho(e)^{i_0}(v)$ et $\mu = \lambda + 2i_0$. On a $\rho(h)(v_0) = \mu v_0$ et $\rho(e)(v_0) = 0$.

(2) Soit $v_i = \rho(f)^i(v_0)$. Par 2.4.4 (1), on a pour tout $i \in \mathbb{N}$,
$$\rho(h)(v_i) = (\mu - 2i)v_i$$
De même que précédemment, soit $s \in \mathbb{N}$ le plus grand entier i tel que $v_i \neq 0$. Les v_i pour $i \in [\![0, s]\!]$ sont alors des vecteurs propres de $\rho(h)$ pour des valeurs propres distinctes deux-à-deux, et donc la famille $(v_i)_{i\in[\![0,s]\!]}$ est libre, et pour tout $i \in [\![0, s]\!]$,
$$\rho(f)(v_i) = v_{i+1}$$
(avec $v_{s+1} = 0$). Par 2.4.4 (2), on a
$$\rho(e)(v_i) = i(\mu - i + 1)v_{i-1}.$$
Ainsi $\mathrm{Vect}((v_i)_{i\in[\![0,s]\!]})$ est stable par ρ, donc est égal à V par hypothèse sur ρ, d'où $s = r$.

(3) On a $(r + 1)(\mu - r)v_r = \rho(e)(v_{r+1}) = 0$ donc
$$\mu = r$$
L'application linéaire qui envoie e_i sur v_i est alors un $\mathfrak{sl}_2$-isomorphisme.

□

Corollaire 2.4.6. *Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ est équivalente à une représentation de la forme $\bigoplus_{i=1}^p \rho_{r_i}$ avec $r_i \in \mathbb{N}$.*

3. Étude combinatoire des algèbres de Lie semi-simples : systèmes de racines

On introduit les systèmes de racines qui permettent d'étudier de manière combinatoire les algèbres de Lie semi-simples.

3.1. **Généralités sur les systèmes de racines.**
On présente succinctement la théorie sur les systèmes de racines et les concepts qui nous seront utiles par la suite sur les algèbres de Lie. Pour une présentation plus complète des systèmes de racines, on renvoie à [4, chap. 18].

3.1.1. *Premières définitions.* On se place ici provisoirement dans un corps k de caractéristique nulle.

Notation 3.1.1. *Soit F un k-espace vectoriel. Pour $a \in F$ et $a^* \in F^*$, on note s_{a,a^*} l'endomorphisme de F définie par*
$$\forall x \in F, s_{a,a^*}(x) = x - a^*(x)a.$$

Définition 3.1.2. *Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Un sous-ensemble $R \subset V$ est un **système de racines** dans V si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(C1) R est fini, engendre V comme espace vectoriel, et $0 \notin R$,
(C2) pour tout $\alpha \in R$, il existe $\alpha^\vee \in V^*$ tel que $\alpha^\vee(\alpha) = 2$ et $s_{\alpha,\alpha^\vee}(R) \subset R$ ($s_{\alpha,\alpha^\vee}$ est alors une réflexion et $\alpha^\vee$ est unique),
(C3) pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$.

*En particulier, si R est un système de racines, par (C2), pour tout $\alpha \in R$, on a $-\alpha \in R$. Le système de racines R est dit **réduit** si*

(C4) pour tout $\alpha \in R$, on a $R \cap \mathrm{Vect}(\alpha) = \{\pm\alpha\}$.

*Les éléments de R sont les **racines** de R, et le **rang** de R, noté $\mathrm{rg}(R)$ est la dimension de V.*

Dans toute la suite de la section 3.1, R sera un système de racines sur un k-espace vectoriel V de dimension finie n.

Notation 3.1.3. *Pour $\alpha, \beta \in R$, on note $s_\alpha := s_{\alpha,\alpha^\vee}$ et $a_{\alpha,\beta} := \beta^\vee(\alpha)$. On a alors $a_{\alpha,\beta} \in \mathbb{Z}$, $a_{\alpha,\alpha} = 2$ et $s_\beta(\alpha) = \alpha - a_{\alpha,\beta}\beta$.*

Définition 3.1.4. *Soient R et R' deux systèmes de racines dans deux k-espaces vectoriels V et V'. On dit que R et R' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : V \mapsto V'$ tel que $\phi(R) = R'$ et tel que pour tous $\alpha, \beta \in R$, on a $a_{\phi(\alpha),\phi(\beta)} = a_{\alpha,\beta}$.*

Définition 3.1.5. *On note* $\mathrm{W}(R)$ *le sous-groupe de* $\mathrm{End}(V)$ *engendré par les réflexions s_α pour $\alpha \in R$. C'est le* ***groupe de Weyl*** *de R.*

Remarque 3.1.6. *Tout élément de* $\mathrm{W}(R)$ *stabilise R et R engendre le k-espace vectoriel V, donc* $\mathrm{W}(R)$ *est fini.*

Définition 3.1.7.

- *Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit V_i un k-espace vectoriel de dimension finie et R_i un système de racines dans V_i, alors $R = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} R_i$ est un système de racines de $V = \bigoplus_{i\in[\![1,n]\!]} V_i$ appelé* ***somme directe*** *des R_i. Son groupe de Weyl* $\mathrm{W}(R)$ *est isomorphe à* $\mathrm{W}(R_1) \times \ldots \times \mathrm{W}(R_n)$.
- *Un système de racines est dit* ***irréductible*** *s'il est non vide et s'il ne peut pas s'écrire comme somme de deux systèmes de racines non vides.*
- *Tout système de racines est somme directe d'un nombre fini de systèmes de racines irréductibles, et ceci de manière unique (à permutation des termes près). Ces systèmes de racines sont appelés* ***composantes irréductibles*** *de R.*

Lemme 3.1.8. *Soit U un sous-k-espace vectoriel de V et $U' =$* $\mathrm{Vect}(R \cap U)$. *Alors $R \cap U$ est un système de racines dans U'.*

Proposition 3.1.9. *Soient V_i des k-espaces vectoriels, $V = \bigoplus_{i\in[\![1,n]\!]} V_i$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $R_i = R \cap V_i$. Sont équivalents :*

(1) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, V_i est stable par $\mathrm{W}(R)$,
(2) $R \subset \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} V_i$,
(3) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, R_i est un système de racines dans V_i et R est somme directe des R_i.

Corollaire 3.1.10. *Le système de racines R est irréductible si et seulement si V est un* $\mathrm{W}(R)$-*module simple.*

Démonstration. Grâce au théorème de Maschke sur les représentations de groupes, le corollaire se déduit de 3.1.9. □

Propriété 3.1.11. *L'ensemble $R^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R\}$ est un système de racines dans V^*, et en identifiant canoniquement V et V^{**}, on a $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$ pour tout $\alpha \in R$.*

Démonstration.

- On peut supposer que R est irréductible. Le cas $\mathrm{rg}(R) = 1$ est clair. Si $\mathrm{rg}(R) \geq 2$, soit x dans $(R^\vee)^\circ = \{z \in R \mid \forall \alpha \in R, \alpha^\vee(z) = 0\}$, alors $\mathbb{C}\,x$ est un $\mathrm{W}(R)$-module, d'où par 3.1.10, $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Vect}(R^\vee) = V^*$.
- Soit $\alpha \in R$. On veut montrer (C2) avec $\alpha^{\vee\vee} = \alpha$. On a déjà $\alpha^{\vee\vee}(\alpha^\vee) = \alpha^\vee(\alpha) = 2$. Soit alors $\beta \in R$. On a $\beta^\vee - \beta^\vee(\alpha)\alpha^\vee = s_{\alpha^\vee,\alpha}(\beta^\vee) = s_\alpha(\beta)^\vee \in R^\vee$. En effet, si l'on note $\gamma = s_\alpha(\beta)$ et $\theta = \beta^\vee - \beta^\vee(\alpha)\alpha^\vee$, on a $\theta(\gamma) = 2$ et $s_{\gamma,\theta} = s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\alpha$ stabilise R.

- (C3) est alors également satisfaite.

$\square$

Définition 3.1.12. *L'ensemble $R^\vee$ est appelé* ***système de racines dual*** *de R. La bijection $\alpha \in R \mapsto \alpha^\vee \in R^\vee$ est dite* ***canonique****. On a $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta^\vee,\alpha^\vee}$.*

Comme $s_{\alpha^\vee,\alpha} = {}^t(s_{\alpha,\alpha^\vee})^{-1}$, l'application $w \in \mathrm{W}(R) \mapsto {}^t w^{-1} \in \mathrm{W}(R^\vee)$ est un isomorphisme de groupes. On identifie ainsi $\mathrm{W}(R)$ et $\mathrm{W}(R^\vee)$. En particulier, on peut considérer que $\mathrm{W}(R)$ agit sur V et sur V^*.

3.1.2. *Forme bilinéaire symétrique $\mathrm{W}(R)$-invariante.*

Proposition 3.1.13. *La forme bilinéaire symétrique définie sur $V \times V$ par :*

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in R} \alpha^\vee(x)\alpha^\vee(y)$$

est non dégénérée et $\mathrm{W}(R)$-invariante, c'est-à-dire $(w(x), w(y)) = (x, y)$ pour tout $w \in W(R)$, et $x, y \in V$.

Remarque 3.1.14. *Soient $R_1, \ldots, R_n$ les composantes irréductibles de R et $V_i = \mathrm{Vect}(R_i)$ pour tout i. Alors toute forme bilinéaire symétrique $\mathrm{W}(R)$-invariante $(.|.)$ est nécessairement de la forme : $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $(.|.)_{|V_i \times V_j} = \lambda_{i,j}(.,.)_{|V_i \times V_j}$ où $\lambda_{i,j} \in k$.*

Dans toute la suite de la section 3.1, $(.,.)$ désignera la forme bilinéaire définie en 3.1.13, et $(.|.)$ désignera simplement une forme bilinéaire symétrique sur $V \times V$ non dégénérée $\mathrm{W}(R)$-invariante.

3.1.3. *Passage aux nombres réels.* Pour des raisons géométriques (notamment euclidiennes), on se placera dans la suite dans des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Cette partie a pour but d'expliquer comment passer de k-espaces vectoriels à des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Notation 3.1.15. *On note $V_\mathbb{Q}$ (resp. $V_\mathbb{Q}^*$) le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de V (resp. V^*) engendré par R (resp. $R^\vee$).*

Propriété 3.1.16. *R est un système de racines dans $V_\mathbb{Q}$, et V (resp. V^*) s'identifie canoniquement à $V_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} k$ (resp. $V_\mathbb{Q}^* \otimes_\mathbb{Q} k$). On identifie également $V_\mathbb{Q}^*$ et $(V_\mathbb{Q})^*$ d'une part, et $V_\mathbb{Q}$ et $(V_\mathbb{Q}^*)^*$ d'autre part via la forme bilinéaire canonique de $V \times V^*$ (cela provient essentiellement de* (3.2.8)*.*

On peut considérer R comme un système de racines dans $V_\mathbb{Q}$, et par extension des scalaires, dans $V_\mathbb{R} = V_\mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$. Les groupes de Weyl sont canoniquement isomorphes.

Définition 3.1.17. *La forme bilinéaire $(.,.)$ définie en 3.1.13 s'étend sur $V_\mathbb{R}$ et devient un produit scalaire. En effet, $(.,.)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on a $(z, z) = \sum_{\alpha \in R} \alpha^\vee(z)^2 \geq 0$ pour tout $z \in V_\mathbb{R}$, avec $(z, z) = 0$ si et seulement si pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(z) = 0$ ce qui équivaut à $z = 0$. Ceci fait de $V_\mathbb{R}$ un espace euclidien. En particulier, on peut définir*

- *la longueur d'une racine $\alpha \in R$ (c'est-à-dire sa norme) que l'on note $||\alpha||$,*
- *l'angle entre deux racines : si α, β sont dans R, on note $\theta_{\alpha,\beta} \in [0, \pi]$ tel que l'on ait $(\alpha, \beta) = ||\alpha|| \cdot ||\beta|| \cdot cos(\theta_{\alpha,\beta})$.*

Par 3.1.14, toute forme bilinéaire $(.|.)$ symétrique sur $V \times V$ non dégénérée $\mathrm{W}(R)$-invariante devient aussi un produit scalaire sur $V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R}$ et donc on peut également définir la longueur d'une racine et l'angle entre deux racines pour $(.|.)$.

3.1.4. *Relations entre deux racines.* Dorénavant (en passant de V à $V_{\mathbb{R}}$) on étudie les systèmes de racines sur des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Propriété 3.1.18. *Soient $\alpha, \beta \in R$. Comme $(.|.)$ est $\mathrm{W}(R)$-invariante, on a*
$$\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} = \frac{(s_\alpha(\alpha)|s_\alpha(\beta))}{(\alpha|\alpha)} = -\frac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)} + \alpha^\vee(\beta),$$
et donc $a_{\beta,\alpha} = 2\dfrac{(\alpha|\beta)}{(\alpha|\alpha)}$. En particulier, $a_{\alpha,\beta}$ est nul si et seulement si $a_{\beta,\alpha}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si α et β sont orthogonaux.

Proposition 3.1.19. *Par 3.1.14, on remarque que pour $\alpha, \beta \in R$, la quantité $\theta_{\alpha,\beta}$ ne dépend pas de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\mathrm{W}(R)$-invariante choisie, de même que $||\beta||/||\alpha||$ dans le cas où α et β sont dans la même composante irréductible.*

Proposition 3.1.20. *Soient $\alpha, \beta \in R$. Comme par 3.1.18, on a*
$$a_{\alpha,\beta}\, a_{\beta,\alpha} = 4\cos^2\theta_{\alpha,\beta} \in [\![-4, 4]\!],$$
il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour $\theta_{\alpha,\beta}$ (nommément un multiple de $\pi/4$ ou de $\pi/6$), donc également pour $a_{\alpha,\beta}$ et $a_{\beta,\alpha}$, et donc pour $||\beta||/||\alpha||$ dans le cas où $a_{\alpha,\beta} \neq 0$ (puisque $||\beta||^2/||\alpha||^2 = a_{\beta,\alpha}/a_{\alpha,\beta}$). De cette liste de possibilités, on tire les assertions suivantes :

(1) Si $a_{\alpha,\beta} > 0$ (c'est-à-dire $(\alpha|\beta) > 0$), alors $\alpha - \beta \in R \cup \{0\}$.
(2) Si $a_{\alpha,\beta} < 0$ (c'est-à-dire $(\alpha|\beta) < 0$), alors $\alpha + \beta \in R \cup \{0\}$.
(3) Si ni $\alpha - \beta$, ni $\alpha + \beta$ ne sont dans $R \cup \{0\}$, alors $(\alpha|\beta) = 0$.

Proposition 3.1.21. *Soient $\alpha, \beta \in R$ non proportionnelles. Soient $I_{\alpha,\beta} = \{k \in \mathbb{Z} \mid \beta + k\alpha \in R\}$ et $S_{\alpha,\beta} = \{\beta + k\alpha \mid k \in I_{\alpha,\beta}\}$. Alors on a les assertions suivantes :*

(1) $I_{\alpha,\beta}$ est de la forme $[\![-p, q]\!]$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.
(2) $S_{\alpha,\beta}$ est stable par s_α et $s_\alpha(\beta + k\alpha) = \beta - (p - q + k)\alpha$.
(3) $a_{\beta,\alpha} = p - q$.

Démonstration.

- $I_{\alpha,\beta}$ étant fini, soient $q = \max I_{\alpha,\beta}$ et $-p = \min I_{\alpha,\beta}$. Comme $0 \in I_{\alpha,\beta}$, les entiers p, q sont positifs. Par l'absurde, si $I_{\alpha,\beta} \neq [\![-p, q]\!]$, alors il existe $r, s \in I_{\alpha,\beta}$ tels que $r + 1 \leq s - 1$ et $[\![r + 1, s - 1]\!] \cap I_{\alpha,\beta} = \emptyset$. Par 3.1.20, on a $(\alpha|\beta + s\alpha) \leq 0$ et $(\alpha|\beta + r\alpha) \geq 0$. Or
$$(\alpha|\beta + s\alpha) - (\alpha|\beta + r\alpha) = (s - r)||\alpha||^2 > 0,$$
ce qui est absurde.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $s_\alpha(\beta + k\alpha) = \beta - (a_{\beta,\alpha} + k)\alpha$. Comme s_α stabilise R, s_α stabilise également $S_{\alpha,\beta}$. Comme $k \in \mathbb{Z} \mapsto \beta + k\alpha \in V_{\mathbb{R}}^*$ est injective, l'application $k \in I_{\alpha,\beta} \mapsto -(a_{\beta,\alpha} + k) \in I_{\alpha,\beta}$ est une bijection décroissante, ce qui prouve les deux points restants.

$\square$

Remarque 3.1.22. *En gardant les hypothèses et les notations précédentes, $I_{\alpha,\beta}$ est de longueur inférieure ou égale à 3.*

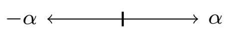
La proposition suivante illustre à quel point les propriétés que doivent satisfaire les systèmes de racines sont restrictives.

Propriété 3.1.23 (admise)**.** *On suppose que R est irréductible et réduite. On a les propositions suivantes (voir* [4, 18.5.8]*) :*

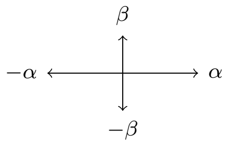
- *Si $\alpha, \beta \in R$ sont tels que $||\alpha|| \leq ||\beta||$, alors $||\beta||^2/||\alpha||^2 \in [\![1, 3]\!]$.*
- *L'ensemble des longueurs des éléments de R a au plus deux éléments.*

3.1.5. *Exemples de systèmes de racines réduits.* On présente quelques systèmes de racines réels réduits de rang 1 et 2. On les considèrera à la lumière de la proposition 3.1.23. Si $\mathrm{rg}(R) \leq 2$, on dit que deux racines distinctes α et β dans R sont adjacentes si pour tout $\gamma \in R \setminus \{\alpha, \beta\}$, on a soit $\theta_{\alpha,\gamma} > \theta_{\alpha,\beta}$, soit $\theta_{\gamma,\beta} > \theta_{\alpha,\beta}$.

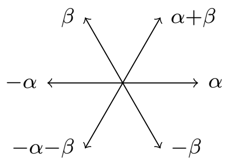
- Il n'existe qu'un seul système de racines de rang 1 (à multiplication par une constante près), dit de type A_1 :



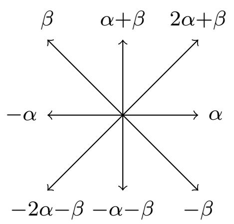
- En rang 2, on a :



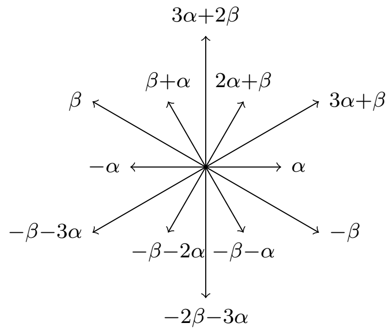
Comme α et β sont orthogonaux, leurs longueurs peuvent être quelconques. Ce système de racines n'est pas irréductible, il est dit de type $A_1 \times A_1$.



Ici toutes les racines ont même longueur, et deux racines adjacentes forment toujours un angle de $\pi/3$. Ce système de racines est irréductible, il est dit de type A_2.



Ici on a $||\beta|| = \sqrt{2}||\alpha||$, et deux racines adjacentes forment toujours un angle de $\pi/4$. Ce système de racines est irréductible, il est dit de type B_2.



Ici on a $||\beta|| = \sqrt{3}||\alpha||$, et deux racines adjacentes forment toujours un angle de $\pi/6$. Ce système de racines est irréductible, il est dit de type G_2.

Il s'agit en réalité des seuls systèmes de racines réduits de rang ≤ 2 à isomorphisme près (voir 3.1.44).

3.1.6. *Chambres de Weyl.* Dans toute la suite, R est un système de racines *réduit* dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{R}}$. On utilise sur $V_{\mathbb{R}}$ sa topologie d'espace euclidien.

Définition 3.1.24. *Soit $P = \bigcup_{\alpha \in R} \ker \alpha^\vee$. On appelle* ***chambres de Weyl*** *de $V_{\mathbb{R}}$ les composantes connexes de $V_{\mathbb{R}} \setminus P$. Elles ne dépendent pas du choix du produit scalaire* $\mathrm{W}(R)$*-invariant. Les éléments de* $\mathrm{W}(R)$ *permutent les chambres de Weyl de R.*

Lemme 3.1.25. $\mathrm{W}(R)$ *agit transitivement sur les chambres de Weyl de $V_{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. Soient C_1, C_2 deux chambres de Weyl de R, $x_1 \in C_1$, $x_2 \in C_2$, et $w \in \mathrm{W}(R)$ rendant minimale la quantité $||x_1 - w'(x_2)||$ pour $w' \in \mathrm{W}(R)$. Soit I le segment reliant x_1 à $w(x_2)$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha \in R$ tel que $I \cap \ker \alpha^\vee \neq 0$. Comme x_1 et $w(x_2)$ ne sont pas dans $\ker \alpha^\vee$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que $(tx_1 + (1-t)w(x_2)|\alpha) = 0$. Mais un calcul donne :

$$||x_1 - s_\alpha(w(x_2))||^2 = ||x_1 - w(x_2)||^2 - \frac{4(1-t)}{t||\alpha||^2}(w(x_2)|\alpha)^2 < ||x_1 - w(x_2)||^2.$$

Ainsi en reprenant les notations de 3.1.24, on a $I \cap P = \emptyset$ donc comme I est connexe, on a $I \subset C_1$ et $I \subset w(C_2)$, en particulier $C_1 \cap w(C_2) \neq \emptyset$, donc par 3.1.24, $C_1 = w(C_2)$. ☐

Remarque 3.1.26 (admise)**.** $\mathrm{W}(R)$ *agit* simplement *transitivement sur les chambres de Weyl de R (voir* [4, 18.8.7]*).*

Proposition 3.1.27. *Toute chambre de Weyl est de la forme*

$$C(B) := \{x \in V \mid \forall i \in [\![1, n]\!], (x|\beta_i) > 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \beta_i^* \;\middle|\; \forall i \in [\![1, n]\!], x_i > 0 \right\}.$$

avec $B := (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ une base de V incluse dans R, et $(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ la base duale de B relativement au produit scalaire $(.|.)$ *(voir 1.2.16).*

Démonstration. Soit C une chambre de Weyl, et $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ un sous-ensemble de R tel que $C = C(B)$. Un tel B existe : par définition d'une chambre de Weyl, si $\beta \in R$, on a soit $(x|\beta) > 0$ pour tout $x \in C$, soit $(x|-\beta) > 0$ pour tout $x \in C$, il suffit donc de prendre l'ensemble (non vide) des $\beta \in R$ tels que l'on ait $(x|\beta) > 0$ pour tout $x \in C$. On choisit alors B vérifiant $C = C(B)$ de cardinal minimal.

Montrons que B engendre l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}}$.

Pour tout $\beta \in R$, on a $(\beta|.)$ de signe constant sur C. Soit $a \in \mathrm{Vect}(B)^{\perp}$ et $x \in C(B)$. On a alors $x + ta \in C(B)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Or pour tout $\beta \in R$, $(x + ta|\beta) = (x|\beta) + t(a|\beta)$ doit être de signe constant, et donc $(a|\beta) = 0$. Ainsi $a \in \mathrm{Vect}(R)^{\perp} = 0$.

Si $i \neq j$, alors $(\beta_i|\beta_j) \leq 0$.

Si l'on avait $(\beta_i|\beta_j) > 0$, alors par 3.1.20 (1), on aurait $\beta_i - \beta_j \in R$. Comme C est un ouvert convexe de $V_{\mathbb{R}}$, il est caractérisé par sa frontière ∂C. En particulier, pour tout $\beta \in B$, $\ker \beta^{\vee} \cap \partial C$ n'est pas inclus dans $\bigcup_{\gamma \in B \setminus \{\beta\}} \ker \gamma^{\vee} \cap \partial C$ (sinon, on pourrait retirer β de B). Ceci implique qu'il existe x_i et x_j dans ∂C tels que pour $m \in \{i, j\}$, on ait $(x_m|\beta_m) = 0$ et $(x_m|\beta_k) > 0$ pour $k \neq m$. On remarque alors que $]x_i, x_j[= \{tx_i + (1-t)x_j \mid t \in]0,1[\ \}$ est contenu dans C. Or on a

$$(x_i|\beta_i - \beta_j) = -(x_i|\beta_j) < 0 \quad \text{et} \quad (x_j|\beta_i - \beta_j) = (x_j|\beta_i) > 0,$$

donc il existe x dans $]x_i, x_j[$, donc dans C, tel que $(x|\beta_i - \beta_j) = 0$, ce qui est absurde puisque comme $\beta_i - \beta_j \in R$, on a $\ker(\beta_i - \beta_j)^{\vee} \cap C = \emptyset$.

Montrons, pour conclure, que B est bien libre dans R.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$ tels que $\sum_i \lambda_i \beta_i = 0$. Par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i |\lambda_i| \beta_i \right\|^2 &= \sum_i |\lambda_i|^2 ||\beta_i||^2 + 2 \sum_{i \neq j} |\lambda_i|\, |\lambda_j|\, (\beta_i|\beta_j) \\ &\leq \sum_i \lambda_i^2 ||\beta_i||^2 + 2 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (\beta_i|\beta_j) = \left\| \sum_i \lambda_i \beta_i \right\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_i |\lambda_i| \beta_i = 0$. Si $x \in C$, on a alors $\sum_i |\lambda_i|(\beta_i|x) = 0$, avec $(\beta_i|x) > 0$ pour tout i, ce qui implique que $\lambda_i = 0$ pour tout i. ☐

Définition 3.1.28. *On reprend les notations précédentes. La base B est appelée **base de** R associée à $C(B)$. Les hyperplans $\ker \beta_i^{\vee} = \{x \in V \mid (x|\beta_i) = 0\}$ sont appelés les **murs** de $C(B)$.*

Remarque 3.1.29. *Comme une chambre de Weyl est uniquement déterminée par les β_i^*, il y a en fait correspondance entre les chambres de Weyl de $V_{\mathbb{R}}$ et les bases de R (à permutation des éléments de B près), ce qui par 3.1.26 implique que $\mathrm{W}(R)$ agit simplement transitivement sur les bases de R.*

Définition 3.1.30. *Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R. On considère sur $V_{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre (total) lexicographique, définie comme suit : pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, on écrit $\sum_i \lambda_i \beta_i \prec \sum_i \mu_i \beta_i$ s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, et $\lambda_k \leq \mu_k$.*

*On note R_+ (resp. R_-) l'ensemble des racines $\alpha \in R$ telles que $\alpha \succ 0$ (resp. $\alpha \prec 0$), et on dit que ce sont les racines **positives** (resp. négatives) de R par rapport à la base B. On a clairement $R_- = -R_+$ et $R = R_+ \sqcup R_-$.*

*Une racine positive est dite **simple** (par rapport à la base B) si elle ne peut pas s'écrire comme somme de deux racines positives de R.*

Proposition 3.1.31. *Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R. Les racines simples de R (par rapport à la base B) sont exactement les éléments de B.*

Démonstration. Soit $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$ l'ensemble des racines simples de R.

- $\supset$: Tout élément $\alpha = \sum_i \lambda_i \beta_i$ de R_+ vérifie $\lambda_i \geq 0$ pour tout i. Pour le montrer, posons $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$, $J = \{i \mid \lambda_i \leq 0\}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x_t = \sum_I \beta_i^* + t \sum_J \beta_i^*$ (qui est dans C). Puisque $(\alpha | x_t) = \sum_I \lambda_i + t \sum_J \lambda_i$ doit être de signe constant en t, comme I est non vide (puisque $\alpha \succ 0$), on a $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in J$.

  Par l'absurde, si β_i pour un certain i s'écrivait $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_1 = \sum_j \lambda_j \beta_j$ et $\alpha_2 = \sum_j \mu_j \beta_j$ des racines positives de R, alors pour $j \neq i$, on aurait $\lambda_j + \mu_j = 0$, donc d'après ce qui précède, $\lambda_j = \mu_j = 0$. Ainsi α_1 et α_2 sont dans $\mathbb{R}\,\beta_i \cap R_+ = \{\beta_i\}$, d'où $\beta_i = 2\beta_i$, ce qui est absurde.
- $\subset$: On commence par montrer que $(\gamma_i | \gamma_j) \leq 0$ si $i \neq j$. Par l'absurde, si $(\gamma_i | \gamma_j) > 0$, alors par 3.1.20 (1), on aurait $\gamma_i - \gamma_j \in R$, et $\gamma_j - \gamma_i \in R$, et donc l'un des deux serait dans R_+. Or $\gamma_i = (\gamma_i - \gamma_j) + \gamma_j$ et $\gamma_j = (\gamma_j - \gamma_i) + \gamma_i$, ce qui contredit la simplicité soit de γ_i, soit de γ_j.

  Comme $B \subset \Gamma$, il suffit, pour conclure, de montrer que Γ est une famille libre de R. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_i \lambda_i \gamma_i = 0$. On montre de la même manière qu'en 3.1.27 que $\sum_i |\lambda_i| \gamma_i = 0$. Comme $\gamma_i \succ 0$ pour tout i, on a alors $\lambda_i = 0$ pour tout i.

□

Proposition 3.1.32. *Soit $B = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ une base de R.*

(1) Tout élément de R_+ est somme d'éléments de B.
(2) Les ensembles R_+ et R_- ne dépendent pas de l'ordre dans lequel sont rangés les éléments de B.
(3) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $s_{\beta_i}(R_+ \setminus \{\beta_i\}) = R_+ \setminus \{\beta_i\}$.

Démonstration. (1) Soient $\alpha_1 \prec \ldots \prec \alpha_r$ les éléments de R_+ rangés dans l'ordre (lexicographique) croissant. On va raisonner par récurrence. La racine α_1 ne peut pas s'écrire comme somme de deux éléments de R_+ puisque c'est le plus petit élément de R_+, d'où α_1 est simple, et donc dans B par 3.1.31. Supposons maintenant que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ s'écrivent comme somme d'éléments de B. Alors soit α_i ne s'écrit pas comme somme de deux éléments de R_+, auquel cas α_i est simple, et donc dans B, soit α_i s'écrit comme somme de deux éléments de R_+, et alors on a nécessairement $\alpha_i = \alpha_l + \alpha_m$ avec $l, m \in [\![1, i-1]\!]$. On conclut par hypothèse de récurrence.

(2) résulte alors de (1) et de la relation $R_- = -R_+$.

(3) Par le point (1), tout élément γ de R s'écrit $\sum_i n_i \beta_i$ avec $n_i \in \mathbb{Z}$ pour tout i, où de plus, tous les n_i sont de même signe (positif si $\gamma \in R_+$, négatif si $\gamma \in R_-$). Si donc $\alpha = \sum_i n_i \beta_i$, avec $n_i \in \mathbb{N}$ pour tout i, est dans $R_+ \setminus \{\beta_i\}$, il existe $j \neq i$ tel que $n_j \in \mathbb{N}^*$ (puisque $R_+ \cap \mathbb{R}\,\beta_i = \{\beta_i\}$). Or le coefficient de $s_{\beta_i}(\alpha) = \alpha - a_{\alpha,\beta_i}\beta_i$ (qui est dans R) en β_j est $n_j \in \mathbb{N}^*$. Par ce qui précède, on a donc $s_{\beta_i}(\alpha) \in R_+ \setminus \{\beta_i\}$.

□

Proposition 3.1.33. *Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R_+$ tels que $\alpha = \sum_i \alpha_i \in R_+$. Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a $\sum_{i=1}^{j} \alpha_{\sigma(i)} \in R_+$.*

Démonstration. Comme $(\alpha|\alpha) > 0$, il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $(\alpha|\alpha_i) > 0$. Si $\alpha = \alpha_i$, on conclut, sinon par 3.1.20 (1), $\alpha - \alpha_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j$ est dans R donc dans R_+, et on raisonne alors par récurrence. □

3.1.7. *Sous-ensembles paraboliques de R.*

Définition 3.1.34. *Soit $P \subset R$. On dit que P est*

- ***fermé*** *si l'on a : $\forall \alpha, \beta \in P$, $\alpha + \beta \in R \Rightarrow \alpha + \beta \in P$,*
- ***parabolique*** *si P est fermé et si $R = P \cup (-P)$.*

Proposition 3.1.35. *Soit $P \subset R$ fermé tel que $P \cap (-P) = \emptyset$. Alors il existe une chambre de Weyl C de R telle que $P \subset R_+$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur $r \geq 1$ que tout $\alpha \in V$ de la forme $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ avec $\alpha_i \in P$ est non nul.
L'assertion est vraie si $r = 1$. Soit alors $r \geq 2$ et supposons l'assertion vraie pour $r - 1$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i$ avec $\alpha_i \in P$ qui soit nul. Alors on a $\left(\alpha_1 \middle| \sum_{i \geq 2} \alpha_i\right) = -(\alpha_1|\alpha_1) < 0$, donc il existe $j \geq 2$ tel que $(\alpha_1|\alpha_j) < 0$. Par 3.1.20 (2), on a donc $\alpha_1 + \alpha_j \in R$, d'où, puisque P est fermé, $\alpha_1 + \alpha_j \in P$, et α est somme de $r - 1$ éléments de P, donc non nul par hypothèse de récurrence, ce qui est absurde.

Montrons qu'il existe $\alpha \in P$ tel que $(\alpha|\beta) \geq 0$ pour tout $\beta \in P$.
Raisonnons par l'absurde. Soit $\alpha_1 \in P$. Il existe alors α_2 tel que $(\alpha_1|\alpha_2) < 0$ donc comme précédemment, $\alpha_1 + \alpha_2 \in P$, et par récurrence, il existe $\alpha_i \in P$ pour tout $i \geq 1$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \in P$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Comme P est fini, il existe $r < s$ tels que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$, donc $\sum_{i=r+1}^{s} \alpha_i = 0$, ce qui contredit le point précédent.

Montrons la proposition par récurrence sur $n = \dim V_{\mathbb{R}}$.
Le cas $n = 1$ est clair. Soit alors $n \geq 2$, on suppose la proposition vraie pour $n - 1$. Par ce qui précède, il existe $\beta_1 \in P$ tel que pour tout $\alpha \in P$, on a $(\alpha|\beta_1) \geq 0$. Soit alors $H = \beta_1^{\perp}$, et $V_1 = \mathrm{Vect}(R \cap H)$. Alors par 3.1.8, $P \cap H$ est un sous-ensemble fermé de $R \cap H$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$ une base de $R \cap H$ telle que $P \cap H$ est inclus dans l'ensemble des racines positives de $R \cap H$ par rapport à la base $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$. Alors P est inclus dans l'ensemble des racines positives de R par rapport à la base $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. □

Corollaire 3.1.36. *Soit $P \subset R$. Sont équivalents :*

(1) il existe une chambre de Weyl C de R telle que $P = R_+$,
(2) P est parabolique et $P \cap (-P) = \emptyset$.

Dans ces conditions, C est alors unique.

Lemme 3.1.37. *Soit C une chambre de Weyl de R, B la base correspondante, R_+ les racines positives correspondant à cette base, P un sous-ensemble fermé de R contenant R_+, on pose également $\Sigma = P \cap (-B)$, et Q l'ensemble des racines qui sont somme d'éléments de Σ. Alors $P = R_+ \cup Q$.*

Démonstration. Comme P est fermé, avec 3.1.33, on montre que $Q \subset P$. Ainsi on a $R_+ \cup Q \subset P$. Pour l'inclusion réciproque, soit $\alpha \in P \setminus R_+$. Alors $\alpha \in -R_+$ et est donc somme d'éléments de $-B$. Montrons alors par récurrence sur $p \geq 1$ que tout $\alpha \in P \setminus R_+$ somme de p éléments de $-B$ est dans Q.

Si $p = 1$, le résultat est clair. Soit maintenant $p \geq 2$ et supposons avoir montré le lemme pour $p - 1$. Soit alors α s'écrivant comme somme de p éléments de $-B$. Par 3.1.33, il existe $\beta \in B$ et $\gamma \in R$ somme de $p - 1$ éléments de $-B$ tels que $\alpha = \gamma - \beta$. Comme P contient R_+ on a β et $-\gamma$ dans P. Ainsi, comme P est fermé, on a $-\beta = \alpha - \gamma \in P$ et $\gamma = \alpha + \beta \in P$. Par conséquent, $-\beta \in \Sigma$, et par hypothèse de récurrence, $\gamma \in Q$, d'où par 3.1.33, $\alpha \in Q$. □

Proposition 3.1.38. *Soit $P \subset R$. Alors sont équivalents :*

(1) P est un sous-ensemble parabolique de R,
(2) P est fermé et il existe une chambre de Weyl C de R telle que l'ensemble des racines positives correspondantes R_+ soit contenu dans P,
(3) il existe une chambre de Weyl C de R et un sous-ensemble $\Sigma \subset -B$ (où B est la base correspondant à C) telle que P soit l'union de R_+ et de l'ensemble des racines qui peuvent s'écrire comme somme d'élément de Σ.

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (2) : soit C une chambre de Weyl de R, B la base correspondant à C et R_+ l'ensemble des racines positives correspondant à C. On suppose que C est telle que le cardinal de $P \cap R_+$ est maximal. Comme P est fermé, il suffit alors de montrer que $B \subset P$.

  Par l'absurde, supposons qu'il existe $\beta \in B \setminus P$. Comme P est parabolique, on a $-\beta \in P$. Or $-\beta = s_\beta(\beta) \in s_\beta(R_+)$, où $R'_+ := s_\beta(R_+)$ est l'ensemble des racines positives correspondant à la chambre de Weyl $s_\beta(C)$ (voir 3.1.29). Ainsi $-\beta \in P \cap R'_+$. De plus, si $\alpha \in R_+ \setminus \{\beta\}$, alors $s_\beta(\alpha) \in R_+$ (par 3.1.32 (3)). Par conséquent, $\alpha = s_\beta^2(\alpha) \in R'_+$. On vient donc de montrer que $P \cap R_+ \subsetneq P \cap R'_+$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur C.
- (2) $\Rightarrow$ (3) vient de 3.1.37.
- (3) $\Rightarrow$ (1) : comme P contient déjà R_+, on a bien $R = P \cup (-P)$, donc il suffit de montrer que P est fermé. Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ telle que $\Sigma = \{-\beta_i \mid i \in [\![1, p]\!]\}$. Soient $\alpha, \beta \in P$ tels que $\alpha + \beta \in R$. Si $\alpha + \beta \in R_+$, alors par hypothèse sur P, on a $\alpha + \beta \in P$. Sinon, $\alpha + \beta$ s'écrit $\alpha + \beta = \sum_{i=1}^n -r_i\beta_i$, avec $r_i \in \mathbb{N}$ pour tout i. Comme α et β sont dans P, on a nécessairement $r_i = 0$ pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, ainsi $\alpha + \beta$ est aussi somme d'éléments de Σ, donc est dans P.

□

3.1.8. *Matrice de Cartan, diagramme de Dynkin et classification des systèmes de racines.*

Définition 3.1.39. *Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R. La* ***matrice de Cartan*** *de R par rapport à la base B est la matrice $M_B = (a_{\beta_i,\beta_j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$.*

Propriété 3.1.40. *On reprend les notations précédentes. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a l'égalité $a_{\beta_i,\beta_j} = 2\dfrac{(\beta_i|\beta_j)}{(\beta_j|\beta_j)}$, donc par 3.1.29, M_B ne dépend pas de la base de R choisie (à permutation près de ses lignes ou de ses colonnes).*

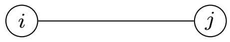
Proposition 3.1.41 (admise)**.** *Soient $V_\mathbb{R}$ et $V'_\mathbb{R}$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, R et R' des systèmes de racines respectivement de $V_\mathbb{R}$ et $V'_\mathbb{R}$, et $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ et $B' = (\beta'_1, \dots, \beta'_n)$ des bases respectivement de R et R'. On suppose qu'il existe $f : B \to B'$ une bijection telle que $M_{(f(\beta_1),\dots,f(\beta_n))} = M_{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$. Alors $\phi : V_\mathbb{R} \to V'_\mathbb{R}$, l'application linéaire prolongeant f, rend R et R' isomorphes. En particulier, la matrice de Cartan M_B détermine le système R à isomorphisme près (voir* [4, 18.13.4]*).*

Définition 3.1.42. *Soit $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R, $a_{i,j} = a_{\beta_i,\beta_j}$ et $\theta_{i,j} = \theta_{\beta_i,\beta_j}$. Le* ***diagramme de Dynkin*** *associé à R est le graphe pondéré (X, f) où $X = [\![1, n]\!]$ et $f : [\![1, n]\!] \to \mathbb{R}$ est définie par :*

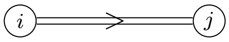
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ f(i, j) = \begin{cases} 0 & si \quad a_{i,j} = a_{j,i} = 0 \ (\text{c'est-à-dire } \theta_{i,j} = \pi/2), \\ \dfrac{a_{i,j}}{a_{j,i}} = \dfrac{||\beta_i||^2}{||\beta_j||^2} & sinon. \end{cases}$$

On rappelle que f ne peut prendre que les valeurs $0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, 1, 2$ et 3. En pratique, on représente les arêtes du diagramme de Dynkin comme suit :

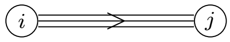
si $f(i,j) = 0$



si $f(i,j) = 1$



si $f(i,j) = 2$



si $f(i,j) = 3$

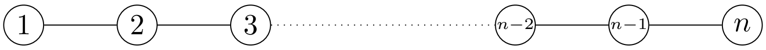
où le signe $>$ va de la racine la plus longue vers la racine la plus courte.

Proposition 3.1.43 (admise)**.** *Soit $\Gamma(R)$ le diagramme de Dynkin de R. Alors on a les propositions suivantes (voir* [4, 18.13.7]*) :*

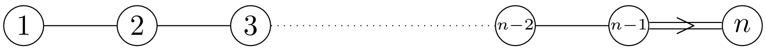
(1) R est irréductible si et seulement si $\Gamma(R)$ est connexe,
(2) $\Gamma(R)$ est une forêt, et si R est irréductible, c'est un arbre.

Théorème 3.1.44 (admis)**.** *Soit $V_{\mathbb{R}}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et R un système de racines réduit irréductible de $V_{\mathbb{R}}$. Alors le diagramme de Dynkin de R est isomorphe (en tant que graphe) à un et un seul diagramme de Dynkin parmi les suivants (voir* [4, 18.14.1]*) :*

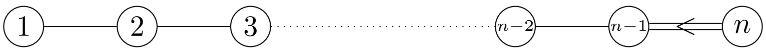
A_n $(n \geq 1)$



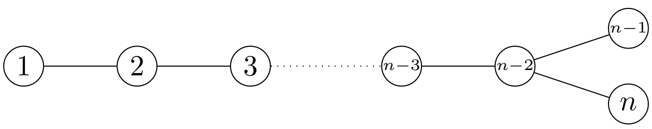
B_n $(n \geq 2)$



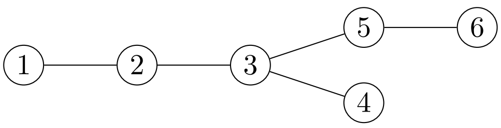
C_n $(n \geq 3)$



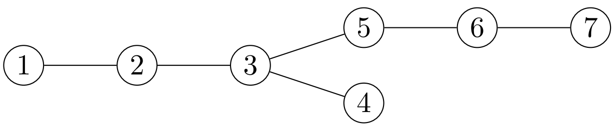
D_n $(n \geq 4)$



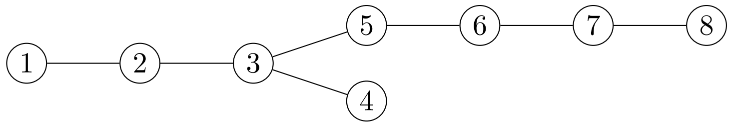
E_6



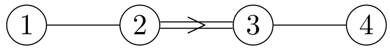
E_7



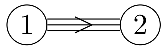
E_8



F_4



G_2



Définition 3.1.45. *Les appellations A_n, B_n etc. réfèrent en réalité à des groupes de Lie (que l'on ne détaillera pas), on parle alors de systèmes de racines **de type** A_n, B_n etc. On dit que les systèmes de racines de type A_n, B_n, C_n et D_n sont les systèmes de racines classiques, et les systèmes de racines de type E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 sont les systèmes de racines exceptionnels.*

3.2. **Système de racines associé à une algèbre de Lie semi-simple.** On revient ici aux algèbres de Lie. Dans toute la section 3.2, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple. Cette partie est inspirée de [2, chap. 1.9 et 1.10].

3.2.1. *Sous-algèbres de Cartan.*

Définition 3.2.1. *Une **sous-algèbre de Cartan** de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on dit que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple déployée.*

On étudie tout d'abord l'existence des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et leur forme.

Proposition 3.2.2 (admis)**.** *Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont des sous-algèbres de Lie nilpotentes maximales de $\mathfrak{g}$. (voir* [2, 1.9.4]*).*

Définition 3.2.3.
- *Il existe des fonctions polynomiales $a_1, \dots, a_{n-1}$ sur $\mathfrak{g}$ telles que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, le polynôme caractéristique de $\operatorname{ad} x$ soit de la forme :*
$$\chi_{\operatorname{ad} x} = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) X^i.$$
- *Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^0(x) = \bigcup_{n \geq 0} \ker(\operatorname{ad} x)^n$. Sa dimension est le plus petit i_0 tel que $a_{i_0}(x) \neq 0$.*
- *Le **rang** de $\mathfrak{g}$ est le plus petit entier r tel que $a_r \not\equiv 0$. On le note $\operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.*
- *Soit r le rang de $\mathfrak{g}$. On dit que $x \in \mathfrak{g}$ est **générique** si $a_r(x) \neq 0$.*

Remarque 3.2.4. *L'ensemble des éléments génériques de $\mathfrak{g}$ est donc un ouvert non vide pour la topologie de Zariski de $\mathfrak{g}$. En particulier, il est dense dans $\mathfrak{g}$.*

Théorème 3.2.5 (admis)**.** *Si x est générique dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^0(x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et la seule contenant x. De plus, toute sous-algèbre de Cartan est de cette forme (voir* [2, 1.9.9 et 1.9.12]*).*

Théorème 3.2.6 (admis)**.** *Si $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors il existe $\theta \in \operatorname{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $\theta(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$ (voir* [2, 1.9.11]*).*

3.2.2. *Algèbre de Lie semi-simple déployée et système de racines .* Dans toute la suite, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une sous-algèbre de Lie semi-simple déployée.

On considère la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ induite par $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$. Via cette représentation, pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on peut définir $\mathfrak{g}^\lambda$ (ainsi que $\mathfrak{g}_\lambda$) comme en 1.2.12.

Définition 3.2.7. *On dit que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est une **racine** de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ si $\lambda \neq 0$ et $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0$. On note $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (ou R s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$.*

On arrive au lien fondamental entre algèbre de Lie semi-simple déployée et systèmes de racine.

Théorème 3.2.8. *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ une algèbre de Lie semi-simple déployée. L'ensemble R des racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ est un système de racines réduit dans $\mathfrak{h}^*$, c'est-à-dire :*

- *(C1) (a) R est fini,*
  - *(b) R engendre $\mathfrak{h}^*$ comme espace vectoriel,*
  - *(c) $0 \notin R$,*
- *(C2) pour tout $\alpha \in R$, il existe $H_\alpha \in \mathfrak{h}^{**} \simeq \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$ et que $s_{\alpha,H_\alpha}(R) \subset R$ (s_{α,H_α} est alors une réflexion et H_α est unique),*
- *(C3) pour tout $\alpha, \beta \in R$, $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$,*
- *(C4) pour tout $\alpha \in R$, on a $R \cap \mathbb{C}\,\alpha = \{\pm\alpha\}$.*

La suite de cette section 3.2.2 aura pour but de démontre ce théorème. Remarquons tout d'abord que (C1)(c) provient de la définition de R.

Proposition 3.2.9. *(1) On a $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in R \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\lambda$, avec $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0$. En particulier, R* est fini, *c'est-à-dire que l'on a (C1)(a).*
(2) Pour tous $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on a $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$.

Démonstration. (1) La décomposition $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in R \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\lambda$ vient de 2.1.21. Par 2.1.14, on a clairement $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^0$. Par l'absurde, on suppose que $\mathfrak{g}^0 \neq \mathfrak{h}$. Soit σ la représentation de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^0 / \mathfrak{h}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$. Par définition de $\mathfrak{g}^0$, pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $\sigma(h)$ est nilpotent. Ainsi par 2.1.17 (2), σ est strictement trigonalisable, et donc il existe $t \in \mathfrak{g}^0 \setminus \mathfrak{h}$ tel que pour tout $x \in \mathfrak{h}$, on a $(\mathrm{ad}\, x)(t) \in \mathfrak{h}$, d'où $t \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{h}$, ce qui contredit la définition d'une algèbre de Cartan.
(2) vient de ce que pour tous $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}^\lambda$, $z \in \mathfrak{g}^\mu$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\mathrm{ad}\, x - (\lambda+\mu)(x)\,\mathrm{id})^n\,([y,z]) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Big[(\mathrm{ad}\, x - \lambda(x)\,\mathrm{id})^i(y)\,, (\mathrm{ad}\, x - \mu(x)\,\mathrm{id})^{n-i}(z)\Big]\,.$$

□

Proposition 3.2.10. *(1) Soient $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$, et K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors $\mathrm{K}(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$, ce qui implique (par 2.2.3) que $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}^\alpha \times \mathfrak{g}^{-\alpha}}$ est non dégénérée pour tout $\alpha \in R$, et en particulier, si $\alpha \in R$, $-\alpha \in R$.*
(2) Pour $x, y \in \mathfrak{h}$, on a $\mathrm{K}(x,y) = \sum_{\alpha \in R} (\dim \mathfrak{g}^\alpha)\, \alpha(x)\, \alpha(y)$.
(3) On a (C1)(b).

Démonstration. (1) Pour tous $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^\beta$, $\nu \in \mathfrak{h}^*$, et $n \in \mathbb{N}$, par 3.2.9 (2), on a $(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)^n(\mathfrak{g}^\nu) \subset \mathfrak{g}^{\nu + n(\alpha+\beta)}$. L'ensemble $R \cup \{0\}$ étant fini, si $\alpha + \beta \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)^n_{|\mathfrak{g}^\nu} = 0$. Ainsi, par 3.2.9 (1), $\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y$ est nilpotent, d'où $\mathrm{K}(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$.

(2) résulte de 2.1.21
(3) Soit $x \in R^\circ = \{z \in \mathfrak{h} \mid \forall \alpha \in R,\ \alpha(z) = 0\}$. Par ce qui précède, pour tout $y \in \mathfrak{h}$, on a $\mathrm{K}(x, y) = 0$, comme K est non dégénérée, cela implique $x = 0$, et donc on a (C1)(b).

□

Proposition 3.2.11. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a $\mathfrak{g}^\lambda = \mathfrak{g}_\lambda$ (on continuera toutefois de privilégier la notation en exposant). En particulier,*

- *l'algèbre de Lie $h = \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}_0$ est commutative,*
- *pour tout $\lambda \in R$, $x \in \mathfrak{g}^\lambda$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a $[h, x] = \lambda(h)x$.*

Démonstration. Soit $h \in \mathfrak{h}$, et d et n les composantes semi-simples et nilpotentes de $\operatorname{ad} h$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $x \in \mathfrak{g}^\lambda$, on a $d(x) = \lambda(h)x$. De plus, d est une dérivation sur $\mathfrak{g}$ (il suffit de vérifier que $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$ pour $x \in \mathfrak{g}^\alpha$, $y \in \mathfrak{g}^\beta$), donc par 2.2.8 (2), il existe $u \in \mathfrak{g}$ tel que $d = \operatorname{ad} u$. Comme pour tout $h' \in \mathfrak{h}$, on a $d(h') = 0$, l'élément u appartient à $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Ainsi $n = \operatorname{ad}(h - u)$ avec $h - u \in \mathfrak{h}$. Comme n est nilpotent, toutes ses valeurs propres sont nulles, donc par 3.2.9 (1), on a $\lambda(h - u) = 0$ pour tout $\lambda \in R$, ce qui par (C1)(b) implique que $h - u = 0$, et donc $d = \operatorname{ad} h$. □

Proposition 3.2.12. *Soit $\lambda \in R$.*

(1) Il existe un unique $H_\lambda \in \mathfrak{h}_\lambda := [\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^{-\lambda}]$ tel que $\lambda(H_\lambda) = 2$.
(2) On a $\dim(\mathfrak{g}^\lambda) = 1$. Ainsi 3.2.10 (2) se réécrit :

$$\forall x, y \in \mathfrak{h},\ \mathrm{K}(x, y) = \sum_{\mu \in R} \mu(x)\mu(y).$$

(3) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{g}^{-\lambda} \oplus \mathfrak{h}_\lambda$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$. Plus précisément, il existe un isomorphisme ϕ de $\mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{g}^{-\lambda} \oplus \mathfrak{h}_\lambda$ dans $\mathfrak{sl}_2$ tel que $\phi(\mathfrak{g}^\lambda) = \mathbb{C}\, e$, $\phi(\mathfrak{g}_{-\lambda}) = \mathbb{C}\, f$ et $\phi(\mathfrak{h}_\lambda) = \mathbb{C}\, h$.

Démonstration. (1) *Commençons par montrer que $\mathfrak{h}_\lambda$ est de dimension* 1.

Comme $\mathrm{K}_{|\,\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ est non dégénérée, il existe un unique $h_\lambda \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$ tel que pour tout $h \in \mathfrak{h}$, on a $\mathrm{K}(h_\lambda, h) = \lambda(h)$. Alors pour tout $x \in \mathfrak{g}^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$\mathrm{K}(h, [x, y]) = \mathrm{K}([h, x], y) = \lambda(h)\,\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}(h_\lambda, h)\,\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}(h, \mathrm{K}(x, y)\, h_\lambda),$$

d'où

$$[x, y] = \mathrm{K}(x, y)\, h_\lambda, \tag{4}$$

ce qui montre l'assertion. On a également montré que $h_\lambda \in \mathfrak{h}_\lambda$.

Reste à montrer que $\lambda(h_\lambda) \neq 0$, et alors on aura (1). Par l'absurde, on suppose que $\lambda(h_\lambda) = 0$. Soient $x \in \mathfrak{g}^\lambda$, $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda}$ tels que $\mathrm{K}(x, y) = 1$, de sorte que $[x, y] = h_\lambda$. Par 3.2.11, on a alors $[h_\lambda, x] = [h_\lambda, y] = 0$, et donc $\mathfrak{g}' := \mathbb{C}\, h_\lambda \oplus \mathbb{C}\, x \oplus \mathbb{C}\, y$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$, donc résoluble. Par le théorème de Lie 2.1.12, la représentation de $\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est trigonalisable, ce qui implique que pour tout élément z de $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathbb{C}\, h_\lambda$, les valeurs propres de $\operatorname{ad} z$ sont toutes nulles, c'est-à-dire $\alpha(z) = 0$ pour tout $\alpha \in R$. Ainsi $h_\lambda = 0$, ce qui est absurde.

(2) Par l'absurde, on suppose que $\dim \mathfrak{g}^\lambda > 1$. Soit $x \in \mathfrak{g}^{-\lambda} \setminus \{0\}$. Comme $\dim \mathfrak{g}^\lambda > 1$, le noyau de la forme linéaire $z \in \mathfrak{g}^\lambda \mapsto \mathrm{K}(z, x)$ est non nul, et donc par l'équation (4), il

existe $X_\lambda \in \mathfrak{g}^\lambda \setminus \{0\}$ tel que $[X_\lambda, x] = 0$. Il existe alors $X_{-\lambda} \in \mathfrak{g}^{-\lambda}$ tel que $[X_\lambda, X_{-\lambda}] = H_\lambda$. Par 3.2.11, on a

$$[H_\lambda, X_\lambda] = \lambda(H_\lambda)X_\lambda = 2X_\lambda,$$
$$[H_\lambda, X_{-\lambda}] = -\lambda(H_\lambda)X_{-\lambda} = -2X_{-\lambda}.$$

Ainsi il existe un isomorphisme $\phi : \mathfrak{sl}_2 \to \mathbb{C}\,X_\lambda \oplus \mathbb{C}\,X_{-\lambda} \oplus \mathbb{C}\,H_\lambda$ tel que $\phi(e) = X_\lambda$, $\phi(f) = X_{-\lambda}$ et $\phi(h) = H_\lambda$. Soit alors la représentation $\rho := \mathrm{ad} \circ \phi$ de $\mathfrak{sl}_2$. La représentation ρ est équivalente à une somme $\bigoplus_{i=1}^p \rho_{r_i}$ avec $r_i \in \mathbb{N}$ (par 2.4.6). Via cette équivalence, x s'identifie donc à une somme $\sum_{i=1}^p x_i$ où ρ_{r_i} agit sur $x_i \in \mathbb{C}^{r_i+1}$. Comme $\rho(e)(x) = [X_\lambda, x] = 0$, on a $\rho_{r_i}(e)(x_i) = 0$ donc par définition de ρ_{r_i}, on a $x_i \in \mathbb{C}\,e^1_{r_1}$ (où $(e^1_{r_1}, \dots, e^{r_1+1}_{r_1})$ est la base canonique de $\mathbb{C}^{r_i+1}$). Par conséquent x_i est vecteur propre de $\rho_{r_i}(h)$ associée à la valeur propre $r_i \in \mathbb{N}$. Finalement, en revenant à ρ, x est somme de vecteurs propres de $\rho(h)$ associés à des valeurs propres positives. Or $\rho(h)(x) = [H_\lambda, x] = -\lambda(H_\lambda)\,x = -2x$, on aboutit donc à une contradiction.

(3) découle automatiquement de ce qui précède.

□

On gardera pour la suite la notation H_λ pour $\lambda \in R$.

Définition 3.2.13. *On dit que $(E, F, H) \in \mathfrak{g}^3$ est un $\mathfrak{sl}_2$-**triplet** de $\mathfrak{g}$ si $\mathbb{C}\,E + \mathbb{C}\,F + \mathbb{C}\,H$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$ avec E qui s'identifie à e, F à f et H à h.*

Proposition 3.2.14. *On termine la démonstration du théorème, c'est-à-dire pour tous $\lambda, \mu \in R$:*

(1) $\mu(H_\lambda) \in \mathbb{Z}$,
(2) $R \cap \mathbb{C}\,\lambda = \{\pm\lambda\}$,
(3) $\mu - \mu(H_\lambda)\lambda \in R$.

De plus, si $\lambda + \mu \in R$, on a $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] = \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$.

Démonstration. Considérons la représentation σ de $\mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{g}^{-\lambda} \oplus \mathbb{C}\,H_\lambda$ dans $\sum_{t\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}^{\mu+t\lambda}$ (la somme a un nombre fini de termes non nuls) induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

(1) Les valeurs propres de $\sigma(H_\lambda)$ sont alors les $(\mu + t\lambda)(H_\lambda) = \mu(H_\lambda) + 2t$, pour tous les $t \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu + t\lambda \in R \cup \{0\}$. Comme $\mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{g}^{-\lambda} \oplus \mathbb{C}\,H_\lambda \simeq \mathfrak{sl}_2$, par la caractérisation des représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$ (2.4.6), l'ensemble des valeurs propres de $\sigma(H_\lambda)$ est de la forme $\{-r, -r+2, -r+4, \dots, r\}$, avec $r \in \mathbb{N}$. Comme μ est dans R, $\mu(H_\lambda)$ est une valeur propre de $\sigma(H_\lambda)$, donc en particulier est dans $\mathbb{Z}$.

(2) On suppose que $\mu \in R$ vérifie $\mu = \xi\lambda$ avec $\xi \in \mathbb{C}^*$. Alors $\mu(H_\lambda) = \xi\,\lambda(H_\lambda) = 2\xi \in \mathbb{Z}$. En inversant les rôles de λ et μ, on montre aussi que $2\xi^{-1} \in \mathbb{Z}$. Ceci impose alors que $\xi \in \{\pm 1/2, \pm 1, \pm 2\}$. En utilisant la symétrie entre λ et μ et le fait que si $\mu \in R$, alors $-\mu \in R$, il suffit de montrer que $\xi \neq 2$. Par l'absurde, on suppose que $\mu = 2\lambda$. Alors σ est une représentation dans $\mathfrak{g}^{2\lambda} \oplus \mathfrak{g}^\lambda \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{-\lambda} \oplus \mathfrak{g}^{-2\lambda}$. Les valeurs propres de $\sigma(H_\lambda)$ sont alors $4, 2, 0, -2, -4$ avec multiplicité 1, et donc en reprenant les notations de 2.4.6, on a $\sigma \simeq \rho_4$, où, si $(e_0, \dots, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^5$, on identifie $\mathfrak{g}^{2\lambda}$ et $\mathbb{C}\,e_0$, $\mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathbb{C}\,e_1$, et ainsi de suite. Finalement, par cette équivalence, $\sigma(\mathfrak{g}^\lambda)(\mathfrak{g}^\lambda) = 4\,\mathfrak{g}^{2\lambda}$, ce qui est absurde puisque $\sigma(\mathfrak{g}^\lambda)(\mathfrak{g}^\lambda) = [\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\lambda] = 0$ (car $\mathfrak{g}^\lambda$ est de dimension 1).

(3) L'ensemble des valeurs propres de $\sigma(H_\lambda)$ est de la forme $\{-r, -r+2, -r+4, \dots, r\}$, avec $r \in \mathbb{N}$. Soient donc t_- et t_+ dans $\mathbb{Z}$ tels que $-r = \mu(H_\lambda) + 2t_-$ et $r = \mu(H_\lambda) + 2t_+$. L'ensemble $[\![t_-, t_+]\!]$ est donc l'ensemble des éléments $u \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu + u\lambda \in R \cup \{0\}$.

Comme $\mu \in R$, on a $0 \in [\![t_-, t_+]\!]$, d'où $t_+ \geq 0$ et $t_- \leq 0$. On a alors $\mu(H_\lambda) = t_+ + t_-$. Or $t_- \leq t_+ + t_- \leq t_+$, donc $\mu - \mu(H_\lambda)\lambda \in R \cup \{0\}$. Il reste à montrer que $\mu - \mu(H_\lambda)\lambda \neq 0$. Par l'absurde, on suppose que $\mu = \mu(H_\lambda)\lambda$. Alors par ce qui précède, $\mu(H_\lambda) = \pm 1$, c'est-à-dire $\mu = \pm\lambda$. Donc on a $\mu(H_\lambda) = \pm\lambda(H_\lambda) = \pm 2$, ce qui est absurde.

Si $\lambda + \mu \in R$, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\mu + t\lambda \neq 0$ (sinon on aurait $\mu = \pm\lambda$, et $\lambda + \mu$ serait égal à 0 ou à 2λ, ce qui est absurde par (2)). Ainsi toutes les valeurs propres de $\sigma(H_\lambda)$ sont simples, et de même parité (par ce qui précède) donc 2.4.6 impose que $\sigma \simeq \rho_s$ pour un certain $s \in \mathbb{N}$, où, si $(e_0, \ldots, e_s)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^{s+1}$, on identifie $\mathfrak{g}^{\mu+t_+\lambda}$ à $\mathbb{C}\, e_0$, $\mathfrak{g}^{\mu+(t_+-1)\lambda}$ à $\mathbb{C}\, e_1$, et ainsi de suite. Comme $\lambda + \mu \in R$, on a $t_+ \geq 1$, donc $\sigma(\mathfrak{g}^\lambda)(\mathfrak{g}^\mu) \neq 0$ (puisque $\sigma(\mathfrak{g}^\lambda)$ s'identifie à $\rho_s(e)$), c'est-à-dire $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \neq 0$, et comme $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ avec $\mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ de dimension 1, on conclut. □

R étant un système de racines dans $\mathfrak{h}^*$, on peut lui appliquer tous les résultats généraux sur les systèmes de racines. Par exemple :

Propriété 3.2.15. *L'ensemble des H_λ pour $\lambda \in R$ engendre $\mathfrak{h}$.*

Remarque 3.2.16. *La forme bilinéaire symétrique* $\mathrm{W}(R)$*-invariante définie en 3.1.13 est dans ce cas :*

$$\forall \lambda, \mu \in R,\ (\lambda, \mu) = \mathrm{K}(H_\lambda, H_\mu).$$

En particulier, $\mathrm{K}_{|\,\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ *est W-invariante.*

3.2.3. *Sous-algèbres de Borel.*

Définition 3.2.17. *Soit B une base de R. On définit R_+ et R_- comme en 3.1.32. Soient $\mathfrak{n}_+ = \bigoplus_{\lambda\in R_+} \mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\lambda\in R_-} \mathfrak{g}^\lambda$, qui sont des sous-algèbres nilpotentes de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$ est la **décomposition triangulaire** de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{h}$ et B.*

*On note alors $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, et $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$, qui sont des sous-algèbres résolubles de $\mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{b}_+$ est la **sous-algèbre** de Borel de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{h}$ et B.*

Proposition 3.2.18 (admise)**.** *Les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ sont exactement les sous-algèbres résolubles maximales de $\mathfrak{g}$ (voir* [2, 1.10.16]*).*

Proposition 3.2.19. *Soit $w \in \mathrm{W}(R)$, que l'on voit comme un endomorphisme de $\mathfrak{h}$. Alors il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ (voir 1.1.15) tel que $\theta_{|\,\mathfrak{h}} = w$.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $w = s_\lambda$, $\lambda \in R$. On rappelle que s_λ est défini comme endomorphisme de $\mathfrak{h}$ par :

$$\forall h \in \mathfrak{h},\ s_\lambda(h) = h - \lambda(h) H_\lambda.$$

Soit $(X_\lambda, X_{-\lambda}) \in \mathfrak{g}^\lambda \times \mathfrak{g}^{-\lambda}$ tel que $(X_\lambda, X_{-\lambda}, H_\lambda)$ est un $\mathfrak{sl}_2$-triplet, et $\theta \in \mathrm{Aut_e}(\mathfrak{g})$ défini par :

$$\theta = (\exp \operatorname{ad} X_\lambda)(\exp \operatorname{ad} X_{-\lambda})(\exp \operatorname{ad} X_\lambda)$$

et montrons qu'il convient. Si $h \in \ker \lambda$, on a $[X_\lambda, h] = [X_{-\lambda}, h] = 0$ donc $\theta(h) = h = s_\lambda(h)$. Il reste à montrer que $\theta(H_\lambda) = s_\lambda(H_\lambda) = -H_\lambda$, et cela se fait par un calcul direct. □

Proposition 3.2.20. *Si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$, alors il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$ tel que $\mathfrak{b}' = \theta(\mathfrak{b})$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ les sous-algèbres de Cartan associées respectivement à $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$. Par 3.2.6, on ramène le problème au cas où $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. Si B et B' sont les bases de R associées respectivement à $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$, par 3.1.29, il existe alors $w \in \mathrm{W}(R)$ tel que $w(B) = B'$, et on conclut par 3.2.19. □

3.2.4. *Algèbres de Lie associées aux systèmes de racines classiques.* Une algèbre de Lie est simple si et seulement si ses systèmes de racines associés (qui sont tous isomorphes) sont irréductibles. Ainsi, le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie simple correspond à l'un des diagrammes présentés en 3.1.44, et on peut donc parler du type de systèmes de racines d'une algèbre de Lie simple.

On peut construire des algèbres de Lie simples dont le type de système de racines correspond aux systèmes de racines listés en 3.1.44. On se limitera ici aux systèmes de racines classiques, les systèmes de racines exceptionnels étant associés à des algèbres de Lie plus complexes.

Théorème 3.2.21. *On donne des algèbres de Lie semi-simples donc le type de système de racines correspond aux systèmes de racines classiques.*

- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sl}_{n+1} := \{M \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ *a pour type de système de racines* A_n *pour tout* $n \geq 1$.
- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}_{2n+1} := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n+1} \mid {}^{\mathrm{t}}MS = -SM\}$, *où l'on a* $S = \begin{pmatrix} 0 & & \mathrm{I}_n \\ & 1 & \\ \mathrm{I}_n & & 0 \end{pmatrix}$, *a pour type de système de racines* B_n *pour tout* $n \geq 2$.
- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{sp}_{2n} := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n} \mid {}^{\mathrm{t}}MS = -SM\}$, *où l'on a* $S = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$, *a pour type de système de racines* C_n *pour tout* $n \geq 3$.
- *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}_{2n} := \{M \in \mathfrak{gl}_{2n} \mid {}^{\mathrm{t}}MS = -SM\}$, *où* $S = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$, *a pour type de système de racines* D_n *pour tout* $n \geq 4$.

On ne montrera pas ce théorème en entier, mais on va donner une ébauche de démonstration dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$.

Soit $(E_{i,j})_{i,j\in[\![1,n+1]\!]}$ la base canonique de $\mathfrak{gl}_{n+1}$. Soit $\mathfrak{h}$ l'ensemble des matrices diagonales de trace nulle, qui est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}\, H_i$ où $H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$. On pose alors $(\epsilon'_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ la base duale de la base $(E_{i,i})_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ des matrices diagonales, et $\epsilon_i = (\epsilon'_i)_{|\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$. Pour tous $i \neq j$, on a alors $\mathfrak{g}^{\epsilon_i-\epsilon_j} = \mathbb{C}\, E_{i,j}$. Ainsi $R = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j\}$ est le système de racines de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$. Soit alors $B = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i \in [\![1,n]\!]\}$ qui est une base de R selon laquelle $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{g}^{\epsilon_i-\epsilon_j} \oplus \bigoplus_{i>j} \mathfrak{g}^{\epsilon_i-\epsilon_j}$ est la décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$, où $\mathfrak{h}$ correspond aux matrices diagonales de trace nulle, $\mathfrak{n}_+ := \bigoplus_{i<j} \mathfrak{g}^{\epsilon_i-\epsilon_j}$ correspond aux matrices triangulaires supérieures strictes, et $\mathfrak{n}_- := \bigoplus_{i>j} \mathfrak{g}^{\epsilon_i-\epsilon_j}$ correspond aux matrices triangulaires inférieures strictes. On a donc $R_+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i < j\}$ et $R_- = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i > j\}$.

La forme bilinéaire $\mathrm{W}(R)$-invariante sur $\mathfrak{h}^*$ définie en 3.1.13 vérifie $(\epsilon_i, \epsilon_j) = 2n\,\delta_{i,j}$ (où δ est le symbole de Kronecker). Par commodité, on pose $(.|.) := \dfrac{(\,.\,,.\,)}{2n}$. Pour tous $i, j \in [\![1, n+1]\!]$, on a alors $(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}|\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = 0$ si et seulement si $\{i, i+1\} \cap \{j, j+1\} = \emptyset$. De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}|\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = 2$, de sorte que le diagramme de Dynkin de R correspond au diagramme d'un système de racines de type A_n.

4. Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie

Dans cette section, $\mathfrak{g}$ sera une algèbre de Lie quelconque.

4.1. **Définitions et premières propriétés.** Cette partie est inspirée de [2, chap. 2.1 et 2.2].

Définition 4.1.1. *Soit* $\mathrm{T}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(\mathfrak{g})$ *l'algèbre tensorielle de* $\mathfrak{g}$ *et* J *l'idéal de* $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ *engendré par les* $x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$*, pour* $x, y \in \mathfrak{g}$*. L'algèbre associative* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) := \mathrm{T}(\mathfrak{g})/J$ *est appelée* ***algèbre enveloppante*** *de* $\mathfrak{g}$*.*

Remarque 4.1.2. *Si* $\mathfrak{g}$ *est commutative,* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est simplement l'algèbre symétrique* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$*.*

Notation 4.1.3.

- *On note* σ *l'application linéaire* $\pi\circ\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *où* $\iota : \mathfrak{g}\to \mathrm{T}(\mathfrak{g})$ *est l'injection canonique, et* $\pi : \mathrm{T}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est la projection canonique. Pour tous* $x, y \in \mathfrak{g}$*, on a*
$$\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) = \sigma([x,y]).$$
- *Pour tout* $n \geq 0$*, on note* $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) := \pi(\bigoplus_{i\in[\![0,n]\!]} \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}))$*.*
- *Soit* $\mathrm{T}_+(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 1} T^n(\mathfrak{g})$*. On note* $\mathrm{U}_+(\mathfrak{g}) := \pi(\mathrm{T}_+(\mathfrak{g}))$*. Comme* J *est inclus dans* $\mathrm{T}_+(\mathfrak{g})$*, on a* $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}_0(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{U}_+(\mathfrak{g})$ *avec* $\mathrm{U}_0(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$*. Ainsi l'algèbre associative* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est engendrée par* 1 *et* $\sigma(\mathfrak{g})$*.*
- *Si* $E \in \{\mathrm{T}(\mathfrak{g}), \mathrm{S}(\mathfrak{g}), \mathrm{U}(\mathfrak{g})\}$*, et si* $x_1, \dots, x_r \in \mathfrak{g}$*, on notera* $x_1x_2\dots x_r$ *l'élément que l'on note habituellement* $x_1\otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_r$*.*

Propriété 4.1.4. *Soit* A *une algèbre unitaire et* $\tau : \mathfrak{g} \to A$ *une application linéaire telle que pour tous* $x, y \in \mathfrak{g}$*, on a* $\tau(x)\tau(y) - \tau(y)\tau(x) = \tau([x,y])$ *. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres* $\tau' : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to A$ *tel que* $\tau'(1) = 1$ *et* $\tau'\circ\sigma = \tau$*.*

Lemme 4.1.5. *Soient* $x_1, \dots x_p \in \mathfrak{g}$*, et* $\gamma \in \mathfrak{S}_p$*. Alors*
$$\sigma(x_1)\dots\sigma(x_p) - \sigma(x_{\gamma(1)})\dots\sigma(x_{\gamma(p)}) \in \mathrm{U}_{p-1}(\mathfrak{g}).$$

Lemme 4.1.6. *Soit* $(x_1, \dots, x_r)$ *une base de* $\mathfrak{g}$*, et pour tout* i*, soit* $X_i = \sigma(x_i)$*. Pour tout* $p\in\mathbb{N}$ *et* $I = (i_1, \dots, i_p) \in [\![1, r]\!]^p$*, on note* $X_I = X_{i_1}\dots X_{i_p}$*. L'ensemble des* X_I *avec* I *une suite croissante d'éléments de* $[\![1, r]\!]$ *de longueur inférieure à* q *engendre* $U_q(\mathfrak{g})$*.*

Démonstration. C'est une conséquence de 4.1.5. □

Lemme 4.1.7 (admis)**.** *On garde les notations de 4.1.6. On note* $i \leq I$ *si* $i \leq i_k$ *pour tout* k*. Pour tout* $i \geq 0$*, on note* $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_i$ *l'ensemble des polynômes de* $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]$ *de degré inférieur à* i*. De même qu'en 4.1.6, on note* $T_I = T_{i_1}\dots T_{i_p}$*. Pour tout* $m \in \mathbb{N}$*, il existe une unique application linéaire* $f_m : \mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_i \to \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]$ *vérifiant les propriétés suivantes (voir* [2, 2.1.7]*) :*

- $f_m(x_i \otimes T_I) = T_iT_I$ *si* $T_I \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_m$ *et* $i \leq I$*,*
- $f_m(x_i \otimes T_I) - T_iT_I \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_q$ *si* $q \leq m$ *et* $T_I \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_q$*,*
- $f_m(x_i\otimes f_m(x_j\otimes T_J)) = f_m(x_j\otimes f_m(x_i\otimes T_J)) + f_m([x_i, x_j]\otimes T_J)$ *si* $T_J \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]_{m-1}$*.*

Théorème 4.1.8 (Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *Soit* $(x_1, \dots, x_r)$ *une base de* $\mathfrak{g}$ *et pour tout* i*, soit* $X_i = \sigma(x_i)$*. Alors l'ensemble des* $X_1^{\nu_1}\dots X_r^{\nu_r}$ *avec* $\nu_i \in \mathbb{N}$ *pour tout* i *forme une base de l'espace vectoriel* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$*. En particulier,* σ *est injective.*

Démonstration. Par 4.1.6, il suffit de montrer que la famille des $X_1^{\nu_1}\dots X_r^{\nu_r}$ avec $\nu_i \in \mathbb{N}$ (qui est exactement la famille des $X_{i_1}\dots X_{i_p}$ avec $i_1 \leq \dots \leq i_p$) est libre. On reprend les notations de 4.1.7. Par 4.1.7, il existe une application bilinéaire $f : \mathfrak{g}\times\mathbb{C}[T_1, \dots, T_r] \to \mathbb{C}[T_1, \dots, T_r]$ telle que pour tout $i \leq I$, on a $f(x_i, T_i) = T_i T_I$ et telle que pour toute suite finie J et pour tous $i, j \in [\![1, r]\!]$, on a

$$f(x_i \otimes f(x_j \otimes T_J)) = f(x_j \otimes f(x_i \otimes T_J)) + f([x_i, x_j] \otimes T_J).$$

Autrement dit $\rho : x \in \mathfrak{g} \mapsto f(x, .) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_r])$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_r]$, telle que pour tout $i \leq I$, on a $\rho(x_i)(T_i) = T_i T_I$. Ceci implique par 4.1.4 l'existence d'un morphisme d'algèbres $\phi : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_r])$ tel que $\phi(X_i)(T_i) = T_i T_I$. On montre alors par récurrence que pour tous $i_1 \leq \ldots \leq i_p$, on a

$$\phi(X_{i_1} \ldots X_{i_p})(1) = T_{i_1} \ldots T_{i_p}.$$

En particulier, les $X_{i_1} \ldots X_{i_p}$ avec $i_1 \leq \ldots \leq i_p$ forment une famille libre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. $\square$

Remarque 4.1.9. *Dans la suite, on identifiera x et $\sigma(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$. Par exemple, on peut réécrire 4.1.8 comme suit : l'ensemble des $x_1^{\nu_1} \ldots x_r^{\nu_r}$ avec $\nu_i \in \mathbb{N}$ pour tout i forme une base de l'espace vectoriel* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Propriété 4.1.10. *Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ un morphisme d'algèbres de Lie. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres (associatives) unitaires $\psi : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{g}')$ qui prolonge ϕ.*

Démonstration. L'unicité vient du fait que $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est engendrée par 1 et $\mathfrak{g}$, et l'existence se déduit de 4.1.4. $\square$

Corollaire 4.1.11. *Si $\mathfrak{g}'$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et $\iota : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ est l'injection canonique, alors par 4.1.8, $\mathrm{U}(\iota)$ est injective. On identifie ainsi $\mathrm{U}(\mathfrak{g}')$ à la sous-algèbre $\iota(\mathrm{U}(\mathfrak{g}'))$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire la sous-algèbre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ engendrée par 1 et $\mathfrak{g}'$.*

Proposition 4.1.12. *Soient $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ des algèbres de Lie. Alors on a un isomorphisme d'algèbres $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_1) \otimes \ldots \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{g}_n) \simeq \mathrm{U}(\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n)$.*

4.2. **Représentations de l'algèbre enveloppante.** L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie permet de ramener des problèmes de représentations d'algèbres de Lie à des représentations d'algèbres associatives. Cette partie est inspirée de [2] (2.2).

Définition 4.2.1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire. Une* ***représentation de*** *A est un morphisme* d'algèbres unitaires $\rho : A \to \mathrm{End}(V)$ *où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On dit que V est un* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$***-module***.

*Soient ρ de A dans V et ρ' de A dans V' deux représentations. L'application linéaire $u : V \to V'$ est un A-**morphisme** de V dans V' si pour tout $x \in A$, on a $\rho'(x) \circ u = u \circ \rho(x)$.*

*ρ et ρ' sont **équivalentes** s'il existe un A-morphisme bijectif de V dans V'.*

Proposition 4.2.2. *Pour toute représentation d'algèbre de Lie ρ de $\mathfrak{g}$ dans V, il existe une unique représentation d'algèbre ρ' de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans V qui prolonge ρ. Inversement, si ρ' est une représentation d'algèbre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans V, alors ${\rho'}_{|\mathfrak{g}}$ est une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dans V. Autrement dit, il y a correspondance entre représentations d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et représentations d'algèbre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. C'est une conséquence de 4.1.4. $\square$

Remarque 4.2.3. *L'étude de ρ revient exactement à celle de ρ' : les sous-$\mathfrak{g}$-modules de V sont exactement les sous-$U(\mathfrak{g})$-modules de V, deux représentations ρ_1 et ρ_2 sont équivalentes si et seulement si ρ_1' et ρ_2' sont équivalentes. On identifiera donc souvent ρ et ρ'.*

Définition 4.2.4. *On définit une application linéaire, notée $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto u^\top \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g},\ (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top = (-1)^n x_n x_{n-1} \dots x_1.$$

*On l'appelle l'**antiautomorphisme principal** de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Il s'agit de l'unique application linéaire de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ vérifiant simultanément les propositions suivantes :*

- $\forall u, v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, $(uv)^\top = v^\top u^\top$,
- $\forall x \in \mathfrak{g}$, $x^\top = -x$,
- $1^\top = 1$.

Propriété 4.2.5. *Soit ρ une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors l'unique représentation d'algèbre de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ qui prolonge la représentation duale ρ^* est la représentation définie par $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto {}^t\rho(u^\top)$.*

Démonstration. Par un calcul, on montre qu'il s'agit bien d'une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ et qu'elle coïncide avec ρ^* sur $\mathfrak{g}$. □

Définition 4.2.6.

- *Pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, on note $L(u) : v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto uv \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. L'application $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto L(u)$ est une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, appelée **représentation régulière gauche** de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. La représentation correspondante de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (qui est $x \in \mathfrak{g} \mapsto L(x)$) est appelée **représentation régulière gauche** de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.*
- *Pour tout $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, on note $R(u) : v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto vu \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Alors $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mapsto R(u^\top)$ est une représentation de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, appelée **représentation régulière droite** de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. La représentation correspondante de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (qui est $x \in \mathfrak{g} \mapsto -R(x)$) est appelée **représentation régulière droite** de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.*
- *L'application $\rho : x \in \mathfrak{g} \mapsto L(x) - R(x)$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ appelée **représentation adjointe** de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$. On a $\rho(x)(u) = xu - ux = [x, u]$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$. Avec les notations de la première section, pour cette représentation, $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est alors le centre de l'algèbre associative $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ (on gardera la notation dans la suite).*

4.3. **Algèbre enveloppante et algèbre symétrique.** Cette partie est inspirée de [2, chap. 2.3 et 2.4].

4.3.1. *Rappels sur les algèbres filtrées et les algèbres graduées.*

Définition 4.3.1. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre. On dit que A est une **algèbre filtrée** s'il existe des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et tels que $A_p A_q \subset A_{p+q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **filtration** de A.*

Définition 4.3.2. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre. On dit que A est une **algèbre graduée** s'il existe des sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A^n$ et tels que $A^p A^q \subset A^{p+q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. On dit que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **graduation** de A.*

Définition 4.3.3. *Soit A une algèbre filtrée et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration de A. On définit l'**algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée** A notée $\mathrm{gr}(A)$ comme suit : on a $\mathrm{gr}(A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n/A_{n-1}$ comme espace vectoriel (où $A_{-1} = 0$), et les applications bilinéaires définies pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ par*

$$A_p/A_{p-1} \times A_q/A_{q-1} \to A_{p+q}/A_{p+q-1}$$
$$(a_p \bmod A_{p-1}, a_q \bmod A_{q-1}) \mapsto a_p a_q \bmod A_{p+q-1}$$

définissent un produit dans $\mathrm{gr}(A)$.

4.3.2. *Le* $\mathfrak{g}$*-module* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Définition 4.3.4.
- $(\mathrm{U}_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une filtration de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *appelée* ***filtration canonique*** *de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.
- *Pour tout* $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, *on appelle* ***filtration*** *de* u, *notée* f_u, *le plus petit entier* n *tel que* $u \in \mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$.

Propriété 4.3.5. *Si* $(x_1, \dots, x_r)$ *est une base de* $\mathfrak{g}$, *alors les* $x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r}$, *où les* $\nu_i \in \mathbb{N}$ *vérifient* $\sum_i \nu_i \leq n$, *forment une base de* $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$. *En particulier, si* $\mathfrak{g}'$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$, *on a* $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g}') = \mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g}')$.

Propriété 4.3.6. *Par 4.1.5, l'algèbre graduée* $\mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ *associée à* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est commutative.*

Notation 4.3.7. *On note également* $(\mathrm{T}^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\mathrm{S}^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ *les graduations canoniques de* $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

Proposition 4.3.8. *Soit* $\mathrm{G}(\mathfrak{g}) := \mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ *et* $\mathrm{G}^n(\mathfrak{g})_{n\in\mathbb{N}}$ *la graduation canonique associée. L'application* $i : x \in \mathfrak{g} \mapsto x \in \mathrm{G}^1(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{G}(\mathfrak{g})$ *se prolonge en un morphisme* $\phi : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{G}(\mathfrak{g})$ *(puisque* $\mathrm{gr}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ *est commutative), qui vérifie* $\phi(\mathrm{S}^n(\mathfrak{g})) \subset \mathrm{G}^n(\mathfrak{g})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *L'application* ϕ *est en fait un isomorphisme d'algèbres qui préserve la graduation.*

Démonstration. Cela résulte du fait que les $i(x_1^{\nu_1} \dots x_r^{\nu_r})$, où les $\nu_i \in \mathbb{N}$ vérifient $\sum_i \nu_i = n$, forment une base de $\mathrm{G}^n(\mathfrak{g})$. $\square$

Remarque 4.3.9. *On identifiera dans la suite* $\mathrm{G}(\mathfrak{g})$ *et* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$, *de sorte que* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *est l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Corollaire 4.3.10. *Si* $u, v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$, *on a* $f_{uv} = f_u + f_v$. *En particulier,* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *est intègre.*

Proposition 4.3.11. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Soient*

- $\pi_n : \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{U}_n(\mathfrak{g})$ *induite par* π *(voir 4.1.3),*
- $p_n : \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}_n(\mathfrak{g})$ *induite par la projection canonique de* $\mathrm{T}(\mathfrak{g})$ *dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$,
- $q_n : \mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}_n(\mathfrak{g})$ *la projection canonique, compte tenu de l'isomorphisme d'espaces vectoriels* $\mathrm{S}_n(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) / \mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g})$.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^n(\mathfrak{g}) \arrow[rr, "p_n"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & \mathrm{S}^n(\mathfrak{g}) \\ & \mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "q_n"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 4.3.12. *Soit* $n \in \mathbb{N}$.

- *L'ensemble* $\mathrm{T}'^n(\mathfrak{g})$ *des éléments symétriques homogènes de degré* n *est le sous-espace vectoriel de* $\mathrm{T}^n(\mathfrak{g})$ *engendré par les éléments de la forme* $\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}$ *avec* $x_1, \dots, x_n$ *dans* $\mathfrak{g}$.
- *L'ensemble* $\mathrm{U}^n(\mathfrak{g})$ *des éléments symétriques homogènes de degré* n *est l'ensemble* $\sigma(\mathrm{T}'^n(\mathfrak{g}))$.

Proposition 4.3.13. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{U}_n(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}_{n-1}(\mathfrak{g}) \oplus \mathrm{U}^n(\mathfrak{g})$, d'où $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{U}^n(\mathfrak{g})$, ce qui fait de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ une algèbre graduée. Le diagramme suivant, où toutes les applications linéaires sont bijectives, est alors commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}'^n(\mathfrak{g}) \arrow[rr, "p_n"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & \mathrm{S}^n(\mathfrak{g}) \\
& \mathrm{U}^n(\mathfrak{g}) \arrow[ur, "q_n"'] &
\end{tikzcd}$$

On rappelle que $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ est munie d'une structure de $\mathfrak{g}$-module par la représentation de $\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ induite par la représentation adjointe.

Proposition 4.3.14. *Soit ϕ l'application linéaire de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ définie par la somme des q_n^{-1}. Alors ϕ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules.*

Ainsi, étudier les $\mathfrak{g}$-*modules* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ revient au même.

L'isomorphisme ϕ induit donc une bijection entre $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, mais qui n'a aucune raison d'être un isomorphisme *d'algèbres*. Toutefois, on verra dans la section suivante que, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre semi-simple, $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont bien deux algèbres isomorphes.

5. Polynomialité de certaines algèbres d'invariants

On donne quelques notations qui seront conservées dans toute la section : $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une algèbre semi-simple déployée, R le système de racines de $\mathfrak{h}^*$ associé, W le groupe de Weyl de R, $B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de R, R_+ l'ensemble des racines positives de R par rapport à la base B, $\delta = \dfrac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} \alpha$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ la décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$ pour B. On note également $Q = \sum_i \mathbb{N}\,\beta_i$.

5.1. **Isomorphismes entre sous-algèbres de** $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$**.** Cette partie est inspirée de [2, chap. 7.3].

Définition 5.1.1. *On rappelle que $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ s'identifie avec les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$.*

- *L'ensemble des $\mathfrak{g}$-invariants $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ de $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ est l'ensemble des **fonctions polynomiales invariantes** sur $\mathfrak{g}$ (où $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ est un $\mathfrak{g}$-module par la représentation induite par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ (voir 1.2.14)).*
- *On note $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$ l'ensemble des $f \in \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ telles que pour tout $w \in W$, on a $f \circ w = f$. Comme le groupe W agit également sur $\mathfrak{h}$, on définit de même $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$.*

Lemme 5.1.2 (admis)**.** *Soit $f \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$. Alors f est une fonction polynomiale invariante sur $\mathfrak{g}$ si et seulement si pour tout $\theta \in \mathrm{Aut}_e(\mathfrak{g})$, on a $f \circ \theta = f$ (voir* [2, 7.3.1]*).*

Lemme 5.1.3 (admis)**.** *Tout élément de $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$ est combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \in \mathfrak{h} \to \mathrm{tr}(\rho(x)^m)$ avec ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ et $m \in \mathbb{N}$ (voir* [2, 7.3.4]*).*

Proposition 5.1.4. *Soit $i : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ le morphisme induit par le morphisme de restriction $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$. Alors $\mathfrak{i}$ induit un isomorphisme d'algèbres $i' : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, et $w \in W$. Par 3.2.19, il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{e}}(\mathfrak{g})$ tel que $\theta_{|\mathfrak{h}} = w$. Par 5.1.2, on a $f \circ \theta = f$, donc on a $i(f) \circ w = i(f)$. Ainsi $i(\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) \subset \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W$.

Montrons alors que i' est injective. Soit $f \in \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ telle que $i(f) = 0$. Par 3.2.5 et 3.2.6, il existe $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{e}}(\mathfrak{g})$ tel que $\theta(x) \in \mathfrak{h}$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ générique. Alors $f(x) = f(\theta(x)) = 0$. Finalement f est nulle sur l'ensemble des éléments génériques de $\mathfrak{g}$, donc par 3.2.4, $f = 0$.

Soit L l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $x \in \mathfrak{g} \to \mathrm{tr}(\rho(x)^m)$ avec $m \in \mathbb{N}$ et ρ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On montre par un calcul que ces fonctions sont bien dans $\mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$, et donc $L \subset \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$. De plus, par 5.1.3, on a également $\mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W \subset i(L)$, on a donc bien surjectivité de i'. ☐

Théorème 5.1.5. *On reprend les notations introduites en début de section. Soit J l'idéal de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ *engendré par* $\mathfrak{n}_+ \cup \mathfrak{n}_-$. *On a* $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \oplus J$, *et cela définit alors un morphisme d'algèbres* $j : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h})$. *Ce morphisme d'algèbres induit un isomorphisme de* $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *(voir 1.2.15) dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$.

Démonstration. Soit $k : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)$ l'isomorphisme de Killing, et $l : \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ l'isomorphisme d'algèbres défini par restriction à $\mathfrak{h}$ de la forme de Killing K de $\mathfrak{g}$ (par 3.2.10 (1)). Si $i : \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)$ est le morphisme d'algèbres induit par le morphisme de restriction $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$, on a $i \circ k = l \circ j$. En effet, puisque ce sont des morphismes d'algèbres, il suffit de le montrer pour $x \in \mathfrak{g}$. Par 3.2.10 (1), on a alors pour tout $h \in \mathfrak{h}$:

$$i(k(x))(h) = k(x)(h) = \mathrm{K}(x, h) = \mathrm{K}(j(x), h) = l(j(x))(h).$$

Comme k est un $\mathfrak{g}$-morphisme et l est W-invariant, on obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{S}(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} \arrow[dr, "i"] & \\
\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, dashed, "j"'] & & \mathrm{S}(\mathfrak{h}^*)^W \\
& \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

où ici i, k et l sont des isomorphismes d'algèbres, ce qui implique le théorème. ☐

5.2. **Morphismes de Harish-Chandra.** Cette partie est inspirée de [2, chap. 7.4].

Lemme 5.2.1. *On pose* $R_+ = \{\lambda_i \mid i \in [\![1, r]\!]\}$. *Pour tout* $\lambda \in R$, *soit* $X_\lambda \in \mathfrak{g}^\lambda \setminus \{0\}$, *et soit* $(H_1, \ldots, H_m)$ *une base de* $\mathfrak{h}$. *Alors par 4.1.8, les éléments*

$$u_{(q_i),(l_i),(p_i)} = X_{-\lambda_1}^{q_1} \ldots X_{-\lambda_r}^{q_r} H_1^{l_1} \ldots H_m^{l_m} X_{\lambda_1}^{p_1} \ldots X_{\lambda_r}^{p_r}$$

avec $q_i, l_i, p_i \in \mathbb{N}$, *engendrent* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ *comme* $\mathbb{C}$-*espace vectoriel. Comme pour tout* $h \in \mathfrak{h}$, *on a*

$$[h, u_{(q_i),(l_i),(p_i)}] = \left(\sum_{i=1}^{r} (p_i - q_i)\lambda_i\right)(h) \;\; u_{(q_i),(l_i),(p_i)},$$

d'où $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in Q} \mathrm{U}(\mathfrak{g})_\lambda$, *avec* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$ *le commutant de* $\mathfrak{h}$ *dans* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$, *donc une sous-algèbre de* $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Soit alors $L = \mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\mathfrak{n}_+ \cap \mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$. Alors :

(1) L est un idéal bilatère de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$ et $L = \mathfrak{n}_-\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$,
(2) $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0 = \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \oplus L$.

Démonstration. Cela se montre en remarquant que les ensembles en question peuvent être caractérisés avec les $u_{(q_i),(l_i),(p_i)}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{n}_-\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) &= \mathrm{Vect}\left(\left\{u_{(q_i),(l_i),(p_i)} \;\middle|\; \sum q_i > 0\right\}\right)\\
\mathrm{U}(\mathfrak{g})\,\mathfrak{n}_+ &= \mathrm{Vect}\left(\left\{u_{(q_i),(l_i),(p_i)} \;\middle|\; \sum p_i > 0\right\}\right)\\
\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0 &= \mathrm{Vect}\left(\left\{u_{(q_i),(l_i),(p_i)} \mid \sum p_i\lambda_i = \sum q_i\lambda_i\right\}\right)\\
\mathrm{U}(\mathfrak{h}) &\simeq \mathrm{Vect}\left(\left\{u_{(q_i),(l_i),(p_i)} \mid \sum p_i = \sum q_i = 0\right\}\right)
\end{aligned}$$

Rappelons que par 3.1.32 (1), si $\sum_i n_i\lambda_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{N}$ pour tout i, alors tous les n_i sont nuls. □

Définition 5.2.2. *On appelle* ***morphisme de Harish-Chandra*** *de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ le projecteur issu de la décomposition $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0 = \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \oplus L$.*

Par 4.1.2, on a $\mathrm{U}(\mathfrak{h}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})$, et donc $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$. On utilise cette identification dans le théorème qui suit.

Théorème 5.2.3 (admis)**.** *On reprend les notations introduites en début de section. Soit ϕ le morphisme de Harish-Chandra de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})_0$ sur $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$, et γ l'automorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{h})$ qui à une fonction polynomiale f associe la fonction polynomiale $\mu \in \mathfrak{h}^* \mapsto f(\mu - \delta)$. Alors $\gamma \circ \phi$ induit un isomorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$, qui ne dépend pas de la base B choisie (voir* [2, 7.4.5]*).*

5.3. **Théorème de Chevalley.** Cette partie est inspirée de [4, 31.1].

On a vu que les deux algèbres $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sont toutes deux isomorphes à l'algèbre $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$. On montre alors que $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ est polynomiale, c'est-à-dire isomorphe à une algèbre de polynômes. La démonstration étant purement algébrique, on se place dans un cadre plus général (et plus facile à manier). On vérifie facilement que ce cadre s'applique à notre cas particulier.

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension l, et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ d'ordre m engendré par des réflexions. On rappelle que G agit sur $\mathrm{S}(V^*)$ en posant :

$$\forall \alpha \in G,\ \forall P \in \mathrm{S}(V^*),\ \forall x \in V,\ \alpha \cdot P = P \circ \alpha^{-1}.$$

Cette action s'étend alors au corps des fractions $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))$ de $\mathrm{S}(V^*)$ en posant $\alpha \cdot \left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{\alpha \cdot u}{\alpha \cdot v}$ pour tout $\alpha \in G$ et tous $u, v \in \mathrm{S}(V^*)$ tels que $v \neq 0$. On note $\mathrm{S}(V^*)^G$ et $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G$ les ensembles des points fixés par l'action de G respectivement sur $\mathrm{S}(V^*)$ et $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))$, et on note de plus $\mathrm{S}(V^*)^G_+$ les éléments de $\mathrm{S}(V^*)^G$ qui n'ont pas de terme constant, et I l'idéal de $\mathrm{S}(V^*)$ engendré par $\mathrm{S}(V^*)^G_+$.

Notation 5.3.1. *Si $u \in \mathrm{S}(V^*)$, on note $u^\bullet = \dfrac{1}{n}\sum_{\alpha \in G} \alpha \cdot u$, de sorte que $u^\bullet \in \mathrm{S}(V^*)^G$. Pour tout $u \in \mathrm{S}(V^*)$ et $v \in \mathrm{S}(V^*)^G$, on a $(uv)^\bullet = u^\bullet v$.*

Lemme 5.3.2. *Soient $l \in \mathbb{N}$, $P, Q \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_l]$ tels que P est homogène de degré 1, et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{C}^l, P(x) = 0 \Rightarrow Q(x) = 0$. Alors P divise Q.*

Démonstration. On peut supposer que P est de la forme $P = T_1 + \sum_{i=2}^{l} a_i T_i$. Par division euclidienne de Q par P par rapport à la variable T_1, il existe $U \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_l]$ et $V \in \mathbb{C}[T_2, \dots, T_l]$ tels que $Q = UP + V$. Soient $\alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{C}$. Puisque $P(T_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$ est un polynôme de degré 1, il existe donc α_1 tel que $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l) = 0$. Par hypothèse, on a alors $Q(\alpha_1, \dots, \alpha_l) = 0$, d'où $V(\alpha_2, \dots, \alpha_l) = 0$, donc $V = 0$. $\square$

Lemme 5.3.3. *(1) L'algèbre* $\mathrm{S}(V^*)$ *est entière sur* $\mathrm{S}(V^*)^G$.
(2) On a $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G = \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*)^G)$.
(3) L'extension de corps $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))/\,\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G$ *est finie de degré m, de plus, le degré de transcendance de* $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G/\,\mathbb{C}$ *est égal à l.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))$, on note $P_x(T) = \prod_{\alpha \in G}(T - \alpha \cdot x) \in \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))[T]$.

(1) Si $u \in \mathrm{S}(V^*)$, alors P_u est G-invariant, de sorte que ses coefficients sont dans $\mathrm{S}(V^*)^G$, et comme $P_u(u) = 0$, l'élément u est bien entier sur $\mathrm{S}(V^*)^G$.

(2) On a clairement $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*)^G) \subset \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G$. Pour l'autre implication, soit $f = \dfrac{u}{v}$ dans $\mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))^G$ avec $u, v \in \mathrm{S}(V^*)$ et $v \neq 0$. On pose alors $v_1 = \prod_{\alpha \in G}(\alpha \cdot v)$ et $u_1 = u \prod_{\alpha \in G \setminus \{\mathrm{id}_V\}}(\alpha \cdot v)$. Alors on a $v_1 \in \mathrm{S}(V^*)^G$, et $u_1 = f v_1 \in \mathrm{S}(V^*)^G$, d'où $f = \dfrac{u_1}{v_1} \in \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*)^G)$.

(3) On note $K = \mathrm{Frac}(\mathrm{S}(V^*))$. Puisque $\mathrm{K} \simeq \mathbb{C}(T_1, \dots, T_l)$, le degré de transcendance de $K/\,\mathbb{C}$ est l. Il suffit donc de montrer que $\left[K : K^G\right] = m$.

Remarquons d'abord que $x \in K \mapsto \alpha \cdot x$ est un morphisme de corps pour tout $\alpha \in G$. Soit $x \in K$. Alors x est annulé par $P_x \in K^G[T_1, \dots, T_l]$, de degré m. Ainsi $[K^G(x) : K^G] \leq m$. Soit $Q \in K^G[T]$ un polynôme irréductible avec une racine x dans K. Le polynôme Q divise P_x, et donc Q est scindé sur K, d'où K/K^G est une extension normale et donc galoisienne puisque séparable (les corps sont de caractéristique nulle). Ainsi si $H = \mathrm{Gal}(K/K^G)$, comme $G \subset H$, on a $\left[K : K^G\right] = \mathrm{Card}\, H \geq m$, d'où l'égalité.

$\square$

Lemme 5.3.4. *Comme* $\mathrm{S}(V^*)$ *est noethérienne, il existe* $u_1, \dots, u_r \in \mathrm{S}(V^*)^G_+$ *tels que l'idéal I est engendré par $u_1, \dots, u_r$. Comme l'action de G sur* $\mathrm{S}(V^*)$ *préserve les degrés, on peut supposer que $u_1, \dots, u_r$ sont homogènes. Alors la $\mathbb{C}$-algèbre* $\mathrm{S}(V^*)^G$ *est l'algèbre engendrée par $u_1, \dots, u_r$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur n que tout élément $u \in \mathrm{S}(V^*)^G$ homogène de degré n s'écrit comme fonction polynomiale en les u_i. Le cas $n = 0$ est clair, et si $n > 0$, supposons que tout élément homogène de degré $d < n$ s'écrit comme fonction polynomiale en les u_i. Soit $u \in \mathrm{S}(V^*)^G$ un élément homogène de degré n. Alors $u \in I$, et donc u s'écrit $u = \sum_i s_i u_i$ avec $s_i \in \mathrm{S}(V^*)$. Puisque u et les u_i sont homogènes, on peut supposer que les s_i sont également homogènes de degré $\deg u - \deg u_i < n$. On a alors $u = u^\bullet = \sum_i s_i^\bullet u_i$. Comme $s_i^\bullet \in \mathrm{S}(V^*)^G$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. $\square$

Lemme 5.3.5. *Soient* $u_1, \dots, u_r \in \mathrm{S}(V^*)^G$ *tels que* $u_1 \notin \sum_{i \geq 2} \mathrm{S}(V^*)^G\, u_i$, *et soient $v_1, \dots, v_r$ dans* $\mathrm{S}(V^*)$ *homogènes tels que $\sum_i u_i v_i = 0$. Alors $v_1 \in I$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $u_1 \notin \sum_{i \geq 2} \mathrm{S}(V^*)\, u_i$. Par l'absurde, si $u_1 = \sum_{i \geq 2} w_i u_i$ avec $w_i \in \mathrm{S}(V^*)$ pour tout i, alors on aurait $u_1 = \sum_{i \geq 2} w_i^\bullet u_i \in \sum_{i \geq 2} \mathrm{S}(V^*)^G\, u_i$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur u_1. En particulier, v_1 ne peut pas être une constante non nulle.

On rappelle que G est engendré par des réflexions. Soit donc $s \in G$ une réflexion par rapport à un hyperplan H et soit $u \in V^*$ tel que $H = \ker u$. Comme $s \cdot v_i - v_i$ est nulle sur H, par 5.3.2, il existe $w_i \in \mathrm{S}(V^*)$ tel que $s \cdot v_i - v_i = uw_i$ (on rappelle que $\mathrm{S}(V^*)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales sur V). Puisque v_i et $s \cdot v_i$ sont homogènes de même degré, w_i est également homogène, et $\deg w_i < \deg v_i$. De plus on a :

$$0 = s \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} u_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{r} u_i \ (s \cdot v_i) = u \left(\sum_{i=1}^{r} u_i w_i \right) + \sum_{i=1}^{r} u_i v_i = u \left(\sum_{i=1}^{r} u_i w_i \right)$$

c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{r} u_i w_i = 0$. Les w_i vérifient donc la même hypothèse que les v_i, mais avec en particulier $\deg w_1 < \deg v_1$.

Montrons alors le lemme par récurrence sur $\deg v_1 \in \mathbb{N}$. Si $\deg v_1 = 1$, alors $w_1 \in \mathbb{C}$, et donc on a nécessairement $w_1 = 0$ (sinon cela contredirait ce que l'on a montré dans la première partie de la démonstration). Ainsi $s \cdot v_1 = v_1$, et comme G est engendrée par des réflexions, on a $\alpha \cdot v_1 = v_1$ pour tout $\alpha \in G$. Comme v_1 ne peut pas être une constante non nulle, on a alors nécessairement $v_1 \in \mathrm{S}(V^*)^G_+ \subset I$.

Soit $n \geq 2$. Supposons le lemme vrai pour $\deg v_1 = n-1$, et soit v_1 vérifiant les hypothèses du lemme, tel que $\deg v_1 = n$. Par hypothèse de récurrence, on a alors $w_1 \in I$, d'où $s \cdot v_1 - v_1 \in I$ pour toute réflexion s de G. Comme G est engendrée par des réflexions et I est stable par G, on a donc $\alpha \cdot v_1 - v_1 \in I$ pour tout $\alpha \in G$. Ainsi, en sommant sur tous les $\alpha \in G$, on obtient : $v_1^\bullet - v_1 \in I$. Puisque $v_1^\bullet \in \mathrm{S}(V^*)^G_+ \subset I$, on a $v_1 \in I$. $\square$

Théorème 5.3.6 (Théorème de Chevalley)**.** *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension l, et G un sous-groupe fini de* $\mathrm{GL}(V)$ *engendré par des réflexions. Alors la $\mathbb{C}$-algèbre* $\mathrm{S}(V^*)^G$ *des invariants de* $\mathrm{S}(V^*)$ *sous l'action de G est engendrée par l éléments algébriquement indépendants.*

Démonstration. En fixant une base de V^*, on identifie dans cette démonstration les algèbres $\mathrm{S}(V^*)$ et $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_l]$, et $\mathrm{S}(V^*)^G$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_l]$. Soient $u_1, \ldots, u_r$ dans $\mathrm{S}(V^*)^G_+$ homogènes engendrant I, tels que r est minimal avec cette propriété. Par 5.3.4, l'algèbre $\mathrm{S}(V^*)^G$ est engendrée par les u_i, donc il suffit de montrer que les u_i sont en fait algébriquement indépendants, et alors par 5.3.3, on aura $r = l$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $P \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_r] \setminus \{0\}$ tel que

$$P(u_1, \ldots, u_r) = 0. \tag{5}$$

Si $\lambda \prod_i Y_i^{m_i}$ est un monôme apparaissant dans P, le degré de $\lambda \prod_i u_i^{m_i}$ (dans $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_l]$) est $d = \sum_i m_i d_i$ où $d_i = \deg u_i$. On peut donc supposer que P est somme de monômes de la forme $\lambda \prod_i Y_i^{\mu_i}$ qui vérifient $\sum_i \mu_i d_i = d$. Soit $k \in [\![1, l]\!]$. En dérivant (5) par rapport à T_k, on obtient

$$\sum_{i=1}^{r} P_i \frac{\partial u_i}{\partial T_k} = 0, \quad \text{où } P_i = \frac{\partial P}{\partial Y_i}(u_1, \ldots, u_r). \tag{6}$$

Le polynôme $P_i \in \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_l]$ est homogène de degré $d - d_i$ et appartient à $\mathrm{S}(V^*)^G$, de plus, les $\dfrac{\partial u_i}{\partial T_k}$ sont homogènes dans $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_l]$.

Quitte à réarranger les T_i, on peut supposer que $(P_1, \ldots, P_m)$ est un ensemble minimal de générateurs de $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{S}(V^*)^G \, P_i$ (comme P est non constant, on a $m \geq 1$). Pour tout $i \in [\![m+1, r]\!]$, il existe $Q_{i,j} \in \mathrm{S}(V^*)^G$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, que l'on peut supposer homogène de degré $d_j - d_i$, tel que

$$P_i = \sum_{j=1}^{m} Q_{i,j} P_j. \tag{7}$$

En réinjectant (7) dans (6), on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} P_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial T_k} + \sum_{j=m+1}^{r} Q_{j,i} \frac{\partial u_j}{\partial T_k} \right) = 0. \tag{8}$$

En appliquant alors 5.3.5 (à $u_i := P_i$ et $v_i := \frac{\partial u_i}{\partial T_k} + \sum_{j=m+1}^{r} Q_{j,i} \frac{\partial u_j}{\partial T_k}$, où par définition de m, on a $P_1 \notin \sum_{i=2}^{r} \mathrm{S}(V^*)^G\, P_i$), on obtient l'existence de $t_{i,k} \in \mathrm{S}(V^*)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ tels que

$$\frac{\partial u_1}{\partial T_k} + \sum_{j=m+1}^{r} Q_{j,1} \frac{\partial u_j}{\partial T_k} = \sum_{i=1}^{r} t_{i,k} u_i. \tag{9}$$

En multipliant (9) par T_k et en additionnant toutes les équations pour tous les $k \in [\![1, l]\!]$ (on rappelle la formule d'Euler : si $R \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_l]$, on a $\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial R}{\partial T_k} T_k = (\deg R)\ R$), on obtient :

$$d_1\, u_1 + \sum_{j=m+1}^{r} d_j\, Q_{j,1}\, u_j = \sum_{i=1}^{r} v_i\, u_i, \quad \text{avec } v_i = \sum_{k=1}^{r} T_k\, t_{i,k} \tag{10}$$

Or $v_1 = \sum_{k=1}^{r} T_k\, t_{1,k}$ n'a pas de terme constant. Ainsi, si l'on ne retient dans (10) que les termes de degré d_1, on déduit que u_1 appartient à l'idéal de $\mathrm{S}(V^*)$ engendré par les u_i pour $i \in [\![2, r]\!]$, ce qui contredit la minimalité de r. □

Proposition 5.3.7. *Soit $(u_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ des éléments de $\mathrm{S}(V^*)^G$ algébriquement indépendants qui engendrent $\mathrm{S}(V^*)$. Alors l'ensemble des degrés des u_i (vus dans $\mathrm{S}(V^*) \simeq \mathbb{C}[T_1, \dots, T_l]$) ne dépend pas du choix de l'ensemble des générateurs $(u_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$.*

Démonstration. Soient $(u_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ et $(v_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ deux ensembles de générateurs de $\mathrm{S}(V^*)^G$ (les $(u_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$ sont algébriquement indépendants, de même que les $(v_i)_{i\in[\![1,l]\!]}$). Comme tout élément X de $\mathrm{S}(V^*)^G$ s'écrit de manière unique comme un polynôme en les u_i (resp. en les v_i), cela donne un sens à l'expression $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ (resp. $\frac{\partial X}{\partial v_i}$) pour tout i. Alors pour tous $i, j \in [\![1, l]\!]$, en dérivant u_i, considéré comme polynôme en les v_k, par rapport à u_j, on a $\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial u_i}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial u_j} = \delta_{i,j}$. Ainsi les matrices $\left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right)_{i,j\in[\![1,l]\!]}$ et $\left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right)_{i,j\in[\![1,l]\!]}$ sont inverses l'une de l'autre, et donc leur déterminants sont non nuls. Par définition du déterminant d'une matrice, il existe donc $\sigma \in \mathfrak{S}_l$ tel que $\prod_{i=1}^{l} \frac{\partial u_i}{\partial v_{\sigma(j)}} \neq 0$. Quitte à réindexer les v_i, on peut supposer que $\sigma = \mathrm{id}$. Autrement dit, si $u_i = P_i(v_1, \dots, v_l)$, alors v_i apparaît bien dans P_i. Puisque les u_i sont homogènes, en retirant si nécessaire les éléments superflus dans P_i, on peut supposer que pour tout monôme $\lambda \prod_i v_i^{m_i}$ qui apparaît dans P_i, on a $\deg u_i = \sum_k m_k \deg v_k$. Comme v_i apparaît bien dans P_i, il existe un tel monôme avec $m_i \geq 1$, et donc on a $\deg u_i \geq \deg v_i$. Par symétrie, on a alors égalité. □

Revenons au cas de $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$, dont on vient de montrer qu'il était polynomial. Les degrés d'un ensemble de générateurs algébriquement indépendants sont indépendants de l'ensemble choisi.

Proposition 5.3.8 (admise)**.** *Soit $l = \dim \mathfrak{h}$, et $u_1, \ldots, u_l$ un ensemble de générateurs algébriquement indépendants de* $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$*. Alors*

$$\sum_{i=1}^{l} \deg u_i = \frac{1}{2}(l + \dim \mathfrak{g}).$$

Cette proposition sera fondamentale dans le cadre de la thèse, pour pouvoir raisonner de manière combinatoire sur les systèmes de racines, mais elle nécessite un travail supplémentaire (voir [1, chap. V, §5.3]).

Grâce aux isomorphismes entre $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$, $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, toutes les propriétés démontrées pour $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ dans cette partie (notamment 5.3.6 et 5.3.7) sont également valables pour $\mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

6. Polynomialité (ou non) de $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ pour $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique

On présente rapidement une partie du sujet de la thèse qui suit le stage. On reprend les notations introduites au début de la section 5.

6.1. **Sous-algèbres paraboliques.** Cette partie est inspirée de [4, chap. 20.7 et 20.8].

Notation 6.1.1. *Si $P \subset R$, on note $\mathfrak{g}^P = \sum_{\alpha \in P} \mathfrak{g}^\alpha$.*

Propriété 6.1.2. *Soit $P \subset R$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$. Alors $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ si et seulement si P est un ensemble fermé de R (voir 3.1.34).*

Proposition 6.1.3. *Soit P fermé dans R, et $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$. Sont équivalents :*

(1) $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$,
(2) il existe une chambre de Weyl C de R telle que P est l'ensemble des racines positives correspondant à C,
(3) $R = P \sqcup (-P)$.

Démonstration. (2) $\Leftrightarrow$ (3) vient de 3.1.36 et (1) $\Leftrightarrow$ (2) vient de la définition d'une sous-algèbre de Borel. ☐

Proposition 6.1.4. *Soit P fermé dans R, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$. Sont équivalents :*

(1) $\mathfrak{p}$ contient une sous-algèbre de Borel de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$,
(2) il existe une chambre de Weyl C de R telle que l'ensemble des racines positives R_+ correspondant à C est contenu dans P,
(3) P est un sous-ensemble parabolique de R.

Si $\mathfrak{p}$ vérifie ces conditions équivalentes, on dit que $\mathfrak{p}$ est une ***sous-algèbre parabolique*** *de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. On a (1) $\Leftrightarrow$ (2) par ce qui précède, et (2) $\Leftrightarrow$ (3) par 3.1.38. ☐

Dans toute la suite, $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$ sera une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$.

Remarque 6.1.5. *On rappelle que par 3.1.38, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, alors il existe une chambre de Weyl C de R et $\Sigma \subset -B$ (où B est la base correspondant à C) tels que $P = R_+ \cup Q$, avec Q l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}$ qui sont somme d'éléments de Σ.*

Puisque toutes les sous-algèbres de Borel se déduisent les unes des autres par automorphisme élémentaire, pour étudier les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$, on pourra fixer une base de R.

6.2. **Étude de la polynomialité du semi-centre de** $\mathrm{S}(\mathfrak{p})$**.** On veut donc comme dans la section 5 étudier les algèbres d'invariants associées aux sous-algèbres paraboliques. Or on a le résultat suivant :

Théorème 6.2.1 (admis)**.** *Dans le cas où* $\mathfrak{g}$ *est simple, si* $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{g}$ *(c'est-à-dire si* $P \neq R$*), alors* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}$.

On s'intéresse donc plutôt au semi-centre de $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$.

Définition 6.2.2. *On considère de nouveau la représentation de* $\mathfrak{p}$ *dans* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})$ *induite par la représentation adjointe de* $\mathfrak{p}$*. Si* $\lambda, \mu \in \mathfrak{p}^*$*, on a* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})_\lambda \mathrm{S}(\mathfrak{p})_\mu \subset \mathrm{S}(\mathfrak{p})_{\lambda+\mu}$*. On appelle alors* ***semi-centre de Poisson*** *la sous-algèbre* $\bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{p}^*} \mathrm{S}(\mathfrak{p})_\lambda$ *de* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})$*.*

Proposition 6.2.3 (admise)**.** *Le semi-centre de Poisson de* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})$ *correspond en fait à la sous-algèbre* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ *où* $\mathfrak{p}' = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$*.*

Remarque 6.2.4. *Si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$*, alors* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'} = \mathrm{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ *est polynomiale.*

On peut alors se ramener au cas où $\mathfrak{g}$ est simple. Une partie du sujet de la thèse est alors d'étudier la polynomialité de $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ pour toute sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$. La réponse est négative en général, mais on cherche à obtenir des résultats plus précis, par exemple en fonction du type de système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ou du type de parabolique choisi.

Théorème 6.2.5 (Joseph)**.** *Si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ *est une sous-algèbre de Borel de* $\mathfrak{g}$*, avec* $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$*, alors on a* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'} = \mathrm{S}(\mathfrak{b})^{\mathfrak{n}}$ *qui est polynomiale, avec* $\mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ *générateurs.*

Théorème 6.2.6 (Panyushev, Premet, Yakimova)**.** *Supposons que* $\mathfrak{g}$ *est simple et que son système de racines est de type* A_n *ou* C_n*. Alors pour toute sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$*, l'algèbre* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ *est polynomiale (voir* [3]*).*

Théorème 6.2.7 (Yakimova)**.** *Supposons que* $\mathfrak{g}$ *est simple et que son système de racines est de type* E_8*. Alors il existe une sous-algèbre parabolique* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{g}$ *telle que l'algèbre* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ *n'est pas polynomiale (voir* [5]*).*

Remarque 6.2.8. *Il existe des cas où l'on ne sait pas si* $\mathrm{S}(\mathfrak{p})^{\mathfrak{p}'}$ *est polynomiale ou non. Par exemple, si* $\mathfrak{g}$ *a un système de racines* R *de type* B_5 *et si* $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$ *avec* $P \cap (-B) = \{\beta_2, \beta_3, \beta_4\}$*, où* $(\beta_i)_{i \in [\![1,5]\!]}$ *est une base de* R *telle que* β_i *correspond au sommet* i *du diagramme de Dynkin associé à* R *comme présenté en 3.1.44.*

Références

[1] Nicolas Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie.*

[2] Jacques Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Bordas Editions, Paris, March 1993.

[3] D. Panyushev, A. Premet, and O. Yakimova. On symmetric invariants of centralisers in reductive Lie algebras. *Journal of Algebra*, 313(1) :343–391, July 2007.

[4] Patrice Tauvel and Rupert W. T. Yu. *Lie Algebras and Algebraic Groups.* Springer, Berlin ; New York, 2005 edition edition, June 2005.

[5] O. Yakimova. A counterexample to Premet's and Joseph's conjectures. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 39(5) :749–754, October 2007.