Université Jean Monnet Saint-Etienne
Faculté de sciences et techniques

Travail d'étude et de recherche

Topologie de Zariski et irréductibilité

GRATI SALMA
JOUANIN NOLWEN

Tuteur : M. BULOIS MICHAEL

Année scolaire — 2016/2017

Remerciements

Nous tenons à remercier M. BULOIS Michael pour son investissement et sa pédagogie. Il nous a en effet beaucoup aidé dans nos travaux et nos recherches, et nous a proposé des solutions efficaces pour avancer dans notre projet.

Introduction

La topologie peut être définie comme étant l'étude de la structure des espaces, ou l'étude des lieux si on se réfère à l'étymologie grecque.
Comme son nom le suggère, elle s'intéresse aux espaces topologiques et permet, entre autres, de définir avec précision l'aspect continu ou non d'une application.

Cette branche des mathématiques a été popularisée par Euler après qu'il a résolu le Problème des sept ponts de Königsberg en 1736 (c'est aussi de là que vient la caractérisation des graphes eulériens).
Grâce à Dedekind, nous connaissons tous la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, celle de la droite réelle, qui définit rigoureusement les notions de limite et de continuité, abordées dans les mathématiques enseignées au lycée.

De nombreuses autres topologies ont ensuite été introduites, comme par exemple la topologie associée à un espace métrique, la topologie de l'ordre, la topologie discrète, la topologie grossière, ou encore la topologie produit, qui est définie sur un produit cartésien d'espaces topologiques.

Il existe aussi une topologie qu'on appelle topologie cofinie, et c'est dans cette catégorie que se range la topologie de Zariski.
Oscar Zariski, mathématicien d'origine russe, né en 1899 et mort en 1986, est connu pour ses nombreux travaux dans le domaine de la géométrie algébrique, dont l'essor a été rendu possible grâce à la topologie.

Le but de cet ouvrage est donc de définir plus précisément la topologie de Zariski, en s'intéressant à sa caractérisation dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$, cette caractérisation pouvant s'étendre à $\mathbb{K}^n$, où $\mathbb{K}$ est un corps et n un entier strictement positif.

1 Topologie de Zariski avec un polynôme à une seule variable :

Définition 1.1. Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, on appelle topologie, toute famille τ de parties de $\mathbf{E}$, appelées parties ouvertes vérifiant ces trois axiomes :

1. toute réunion (finie ou infinie) d'ouverts est ouverte.
2. l'intersection de deux ouverts est ouverte.
3. $\mathbf{E}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.

On dit que ($\mathbf{E}$,τ) est un espace topologique.

Définition 1.2. Soit ($\mathbf{E}, \tau$) un espace topologique quelconque.
Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{P}(\mathbf{E})$. On dit que $\mathbf{F}$ est une partie fermée de $\mathbf{E}$ pour la topologie τ si et seulement si le complémentaire de $\mathbf{F}$ est une partie ouverte pour la topologie τ.

Proposition 1.3. *Soit* ($\mathbf{E}, \tau$) *un espace topologique quelconque, alors :*

1. *toute intersection (finie ou infinie) de parties fermées est un fermé.*
2. *la réunion de deux fermés est un fermé.*
3. $\mathbf{E}$ *et* $\emptyset$ *sont des fermés.*

Démonstration.

1. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties fermées pour la topologie τ. Notons $O_i = E \setminus F_i$ pour tout i $\in I$. Par définition des fermés, O_i est un élément de τ pour tout $i \in I$. On a $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I}(E \setminus O_i) = E \bigcup_{i\in I} O_i)$ or $\bigcup_{i\in I} O_i$ est une partie ouverte pour la topologie τ d'après le premier axiome des ouverts . Donc $\bigcap_{i\in I} F_i$ est une partie fermée pour la topologie τ.
2. Soient F et F' deux parties fermées pour la topologie τ. Notons $O = E \setminus F$ et $O' = E \setminus F'$, on a donc O et O' qui sont des parties ouvertes pour la topologie τ. De plus $F \cup F' = (E \setminus O) \cup (E \setminus O') = E \setminus (O \cap O')$, or O$\cap O'$ est une partie ouverte pour la topologie τ d'après le deuxième axiome des ouverts et $F \cup F'$ est une partie fermée pour la topologie τ.
3. On a $E = E \setminus \emptyset$ et $\emptyset = E \setminus E$, or $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes pour la topologies τ , donc E et $\emptyset$ sont aussi des parties fermées pour la topologie τ.

□

Indifféremment, si l'ensemble de fermés vérifie les trois axiomes de la proposition 1.3, alors les complémentaires définissent une topologie. On définit une topologie bien précise sur $\mathbf{E} = \mathbb{R}$, " La topologie de Zariski " par ses ouverts ou ses fermés.

Définition 1.4. Par définition, les fermés de la topologie de Zariski sont les :
$\mathcal{V}(P) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ avec P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$.

Remarque.
Si $P = 0$ *alors* $\mathcal{V}(P) = \mathbb{R}$ *.*
Si $P \neq 0$ *alors* $\mathcal{V}(P)$ *est fini .*

Proposition 1.5. *Les fermés sont* $\mathbb{R}$ *et les parties finies de* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration.
($\subset$) L'ensemble des fermés est inclus dans $\{\mathbb{R}\} \cup$ { les parties finies de $\mathbb{R}$}.
Car si $P = 0$ alors $\mathcal{V}(P) = \mathbb{R}$ et si $P \neq 0$ alors $\mathcal{V}(P)$ est fini.
($\supset$) Soit $B = \{x_1, ..., x_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$.
On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, alors, P est un polynôme dont les racines sont $x_1, ..., x_n$.

Donc $\mathcal{V}(P) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\} = \{x_1, ..., x_n\} = B$.
Or, P est un polynôme, donc $\mathcal{V}(P)$ est un fermé, donc B est aussi fermé. Donc $\{\mathbb{R}\} \cup \{$ les parties finies de $\mathbb{R}\}$ fait partie de l'ensemble des fermés.

Conclusion : les fermés sont $\mathbb{R}$ et les parties finies de $\mathbb{R}$.

□

Proposition 1.6. $\{\mathcal{V}(P) | P \in \mathbb{R}[x]\}$ *décrit une topologie.*

Démonstration.
Pour montrer que $\{\mathcal{V}(P)\}$ définissent une topologie, il faut vérifier les trois axiomes des fermés :

1. Soit $(A_k)_{k \in I}$ une famille fermés , on va montrer que $\bigcap_{k \in I} A_k$ est fermée.
   Si $\forall k \in I$, $A_k = \mathbb{R}$ alors $\cap A_k = \mathbb{R}$ qui est un fermé.
   Si $\exists k_0 \in I$, $A_{k_0} \neq \mathbb{R}$ alors A_{k_0} est une partie finie de $\mathbb{R}$.
   Donc $\bigcap_{k \in I} A_k \subset A_{k_0}$ qui est finie , donc $\bigcap_{k \in I} A_k$ est finie, qui est donc une partie fermée.
2. Soient A_1 et A_2 deux parties fermées, montrer que $A_1 \cup A_2$ est un fermé :
   $Cas1$: si $A_1 = \mathbb{R}$ ou $A_2 = \mathbb{R}$ alors $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$.
   $Cas2$: si A_1 est finie et A_2 est finie alors $A_1 \cup A_2$ est finie.
   Donc $A_1 \cup A_2$ est bien un fermé.
3. Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des fermés : $\mathbb{R}$ est bien un fermé car si $P = 0$ alors $\mathcal{V}(P) = \mathbb{R}$.
   $\emptyset$ est bien un fermé pour un polynôme constant $\neq 0$.

Conclusion : Les $\mathcal{V}(P) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ définissent bien une topologie.

□

Définition 1.7. On définit l'ouvert $\mathcal{D}(P) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) \neq 0\}$.
Les $\mathcal{D}(P)$ sont le vide et les parties dont le complémentaire est fini.

Définition 1.8. Soit $(\mathbf{E}, \tau)$ un espace topologique et soit $x \in \mathbf{E}$. On appelle voisinage de x toute partie $\mathbf{V}$ de $\mathbf{E}$ qui contient x.
On note $\mathscr{V}_\tau(x)$ l'ensemble des voisinages de x pour la topologie τ.

Définition 1.9. Soit $(\mathbf{E}, \tau)$ un espace topologique et soit A une partie de $\mathbf{E}$. On appelle voisinage de A toute partie $\mathbf{V}$ de $\mathbf{E}$ qui contient un ouvert qui contient A.

Définition 1.10. Soit $(\mathbf{E}, \tau)$ un espace topologique. Soit A une partie de $\mathbf{E}$ et soit $x \in \mathbf{E}$. On dit que x est un point intérieur à A si et seulement si $A \in \mathscr{V}_\tau(x)$. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\overset{\circ}{A}$.

Remarque. *L'intérieur d'une partie A est le plus grand ouvert de X inclus dans A (c'est la réunion de tous les ouverts inclus dans A).*

Définition 1.11. Soit $(\mathbf{E}, \tau)$ un espace topologique. Soit A une partie de $\mathbf{E}$ et soit $x \in \mathbf{E}$. On dit que x est adhérent à A si et seulement si tout voisinage de x rencontre A. C'est à dire, si et seulement si : $\forall \mathbf{V} \in \mathscr{V}_\tau(x), \mathbf{V} \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points x est appellé adhérence de A, noté $\bar{A}$.

Remarque. *L'adhérence d'une partie A est le plus petit ensemble fermé contenant cette partie.*

.

Exemple. Pour la topologie de Zariski :

1. $\overline{[0,1]} = \mathbb{R}$.
   En effet, $\overline{[0,1]}$ est le plus petit fermé qui contient $[0,1]$. Donc, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\mathcal{V}(P) = \overline{[0,1]}$.
   Donc $\forall x \in [0,1]$, $x \in \overline{[0,1]} = \mathcal{V}(P)$. D'où P admet une infinité de racines dans $[0,1]$, c'est donc le polynôme constant qui est égal à 0. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}[x], P(x) = 0$ d'où $\mathbb{R} \subset \mathcal{V}(P)$. Et comme, par definition $V(P) \subset \mathbb{R}$ alors $\mathcal{V}(P) = \overline{[0,1]} = \mathbb{R}$.
2. $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1]}}= \emptyset$.
   En effet, soit $\mathcal{D}(P) \subset [0,1]$ un ouvert, donc $\{x \in \mathbb{R} | P(x) \neq 0\} \subset [0,1]$.
   Par passage au complémentaire, on obtient $\mathbb{R}[0,1] \subset \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\} = \mathcal{V}(P)$.
   Donc P a une infinitée de racines dans $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, d'où $P = 0$, et alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$.
   Donc $\mathcal{D}(P) = \{x \in \mathbb{R} | P(x) \neq 0\} = \emptyset$.

   Donc, tout ouvert inclus dans $[0,1]$ est vide, en particulier on aura $\overset{\circ}{[0,1]}= \emptyset$.
3. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.
   En effet, $\exists P \in \mathbb{R}[x], \overline{\mathbb{Z}} = \mathcal{V}(P)$ car $\overline{\mathbb{Z}}$ est un fermé.
   $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \overline{\mathbb{Z}}$, donc P a une infinité de racines dans $\mathbb{Z}$.
   Donc $P = 0$, d'où $\overline{\mathbb{Z}} = \mathcal{V}(P) = \mathbb{R}$.
4. $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}= \emptyset$.
   En effet, soit $\mathcal{D}(P) \subset \mathbb{Z}$ un ouvert. Alors $\{x \in \mathbb{R} | P(x) \neq 0\} \subset \mathbb{Z}$.
   Par passage au complémentaire, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \subset \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\} = \mathcal{V}(P)$. Donc P a une infinité de racines dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, d'où $P = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$.

   D'où $\mathcal{D}(P) = \emptyset$, et donc tout ouvert inclus dans $\mathbb{Z}$ est vide, en particulier, on aura $\overset{\circ}{\mathbb{Z}}= \emptyset$.

Proposition 1.12. *Soit $(\mathcal{D}(P_i))_{i \in I}$, un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, alors on peut en extraire un sous recouvrement fini.*

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R} \subset \bigcup_{i \in I} D(p_i)$, montrer que $\exists J \subset I$ qui est fini tel que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{i \in J} D(p_i)$.
Supposons par l'absurde que si $\forall i \in I$ tel que $P_i = 0$ alors $\bigcup_{i \in I} D(p_i) \neq \emptyset$, d'où $\mathbb{R} \subset \emptyset$ ce qui est impossible. Donc $\exists i \in I$ tel que $P_i \neq 0$.
Fixons $i \in I$ tel que $\mathcal{D}(P_i) = \mathbb{R} \setminus \{x_{i,j} | j \in [\![1,n]\!]\}$ où les $x_{i,j}$ sont les racines de p_i.
Soit $j \in [\![1,n]\!]$ alors $x_{i,j} \in \mathbb{R}$ et $\exists k_j \in I$ tel que $P_{k_j}(x_{i,j}) \neq 0$.
Donc $\forall j \in [\![1,n]\!], \exists k_j \in I$ tel que $P_{k_j}(x_{i,j}) \neq 0$.
D'où $\mathbb{R} \subset \bigcup_{j \in [\![1,n]\!]} D(p_{k_j}) \cup \mathcal{D}(P_i)$.

□

Remarque. *D'aprés la définition de Lebesgue, un espace topologique $(\mathbf{E}, \tau)$ est dit compact si de tout recouvrement d'ouvert de $\mathbf{E}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
D'où, on dit à partir de la proposition précédente que $\mathbb{R}$ munit de la topologie de Zariski est un compact.

Proposition 1.13. *Les polynômes sont des fonctions continues pour la topologie de Zariski.*

Démonstration.
Pour montrer que les polynômes sont des fonctions continues pour la topologie de Zariski, on va montrer que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, montrons que l'image réciproque par P d'un fermé est un fermé.
Soit $\mathcal{V}(Q) = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) = 0\}$ un fermé avec $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}(\mathcal{V}(Q)) &= \{x \in \mathbb{R} | P(x) \in \mathcal{V}(Q)\} && (1)\\ &= \{x \in \mathbb{R} | Q(P(x)) = 0\} && (2)\\ &= \{x \in \mathbb{R} | Q \circ P(x) = 0\} && (3)\\ &= \mathcal{V}(Q \circ P) && (4)\end{aligned}$$

Or P et Q sont des polynômes, donc, $Q \circ P$ est aussi un polynôme. D'où $\mathcal{V}(Q \circ P)$ est bien un fermé, et donc P est continue.

□

Exemple.

1. La fonction $(\exp(x))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue pour la topologie de Zariski.
   En effet, soit F un fermé, comme la fonction $\exp$ est injective, alors, $\# \exp^{-1}(F) \leqslant \#F$.
   Cas 1 : si F est une partie finie de $\mathbb{R}$, alors $\exp^{-1}$ l'est aussi.
   Cas 2 : si $F = \mathbb{R}$, alors $\exp^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ qui est un fermé.
   Donc, on a bien bien montré que l'image réciproque d'un fermé est un fermé, d'où la fonction $(\exp(x))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue.

2. La fonction $\sin x$ n'est pas continue.
   Contre exemple : $\sin^{-1}(\{0\}) = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est ni $\mathbb{R}$, ni une partie finie de $\mathbb{R}$, donc ce n'est pas un fermé. D'où, la fonction $\sin$ n'est pas continue car $\{0\}$ qui est un fermé (une partie finie de $\mathbb{R}$), n'admet pas un fermé par image réciproque.

3. La topologie de Zariski sur $\mathbb{C}$, est définie de façon analogue à celle sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes descriptions de fermés et d'ouverts.
   La fonction $(\exp(x))$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas continue pour la topologie de Zariski.
   Contre exemple : $\exp^{-1}(\{1\}) = \{2ik\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ qui n'est ni $\mathbb{C}$, ni une partie finie de $\mathbb{C}$, donc ce n'est pas un fermé. D'où, la fonction $\exp$ n'est pas continue car $\{1\}$ qui est un fermé (une partie finie de $\mathbb{C}$), n'admet pas un fermé par image réciproque.

Définition 1.14. Soit $(\mathbf{E}, \tau)$ un espace topologique. On dit que $(\mathbf{E}, \tau)$ est un espace topologique séparé si est seulement si pour tout $x \in \mathbf{E}$ et pour tout $y \in \mathbf{E}$ tel que $x \neq y$, il existe des voisinage $\mathbf{V}$ de x et $\mathbf{W}$ de) tel que $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \emptyset$ (disjoints).

Lemma 1.15. *$\mathbb{R}$ n'est pas séparé pour la topologie de Zariski.*

Démonstration.

Pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas séparé pour la topologie de Zariski, il suffit de montrer que l'intersection de deux ouverts non vide est non vide.
Soient $A = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) = 0\}$ deux parties fermées.
On a $(A \cup B)^C = (\{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} | Q(x) = 0\})^C$
$\Leftrightarrow A^C \cap B^C \{x \in \mathbb{R} | P(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} | Q(x) \neq 0\}$
Supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$, c'est à dire A^C et B^C sont non-vide.
Par l'absurde, si $A \cup B = \mathbb{R}$ sachant que $Q \neq 0$,alors, on aura B finie et donc A sera non fini. Donc P aura une infinitée de racines, d'où $P = 0$ ce qui contredit l'hypothése. Donc $A \cup B$ n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, d'où l'intersection de deux ouverts non vide est non vide.

□

Définition 1.16. Un espace topologique $\mathbf{X}$ est dit irréductible si on a :
$[(\mathbf{X} = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 sont des fermés$) \Rightarrow (\mathbf{X} = F_1$ ou $\mathbf{X} = F_2)]$.

Proposition 1.17. *$\mathbb{R}$ est irréductible pour la topologie de Zariski.*

Démonstration.
On a déjà montré que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide.
Donc $O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset$ avec O_1, O_2 deus ouverts $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.
Et par contraposition, on obtient $\mathbb{R} = F_1 \cup F_2$ avec F_1, F_2 sont des fermés $\Rightarrow (\mathbb{R} = F_1$ ou $\mathbb{R} = F_2)$.

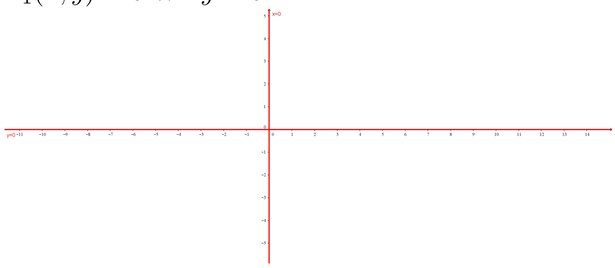
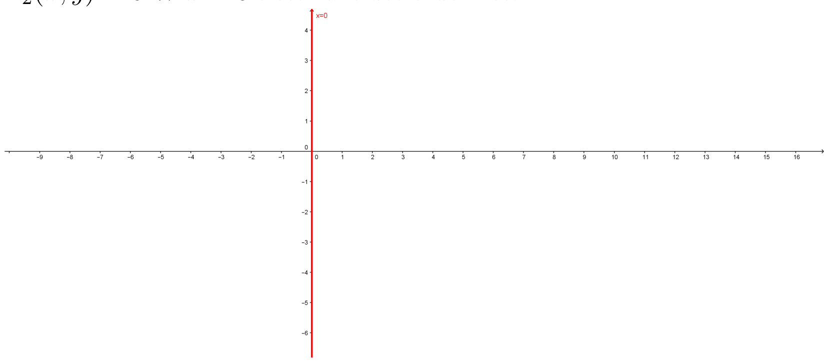
□

2 Topologie de Zariski avec un polynôme à deux variables :

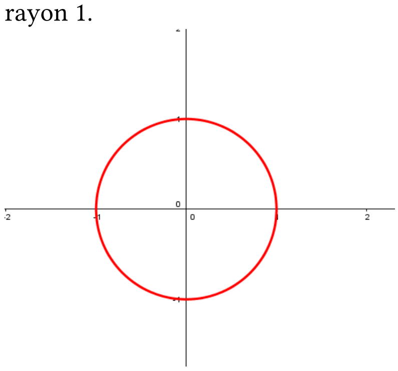
Définition 2.1. On definit les fermés de la topologie de Zariski dans $\mathbb{R}^2$ par : Soit $A \subset \mathbb{R}[x, y]$, $\mathcal{V}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P(x, y) = 0 \forall P \in A\}$.

Etudiant géometriquement, les fermés $\mathcal{V}(P_i)$ avec $i \in [\![1, 6]\!]$ pour les polynomes suivants :
$P_1 = xy$.
$P_2 = x$.
$P_3 = x^2 + y^2 - 1$.
$P_4 = x^2 - y$.
$P_5 = x^3 - y^2$.
$P_6 = x^3 - xy + x^2 - y$.

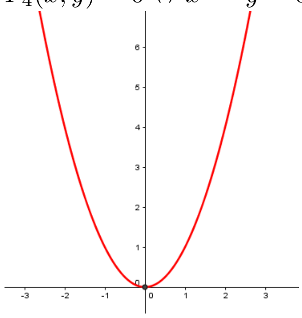
Et $\mathcal{V}(\{P_1, P_4\})$ et $\mathcal{V}(\{P_6, P_4\})$

1. Pour $P_1 = xy$, $\mathcal{V}(P_1(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_1(x, y) = 0\}$.
   $P_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0$ c'est l'union entre l'axe des ordonnés et l'axe des abscisses.
   
2. Pour $P_2 = x$, $\mathcal{V}(P_2(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_2(x, y) = 0\}$.
   $P_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ c'est l'axe des ordonnés.
   

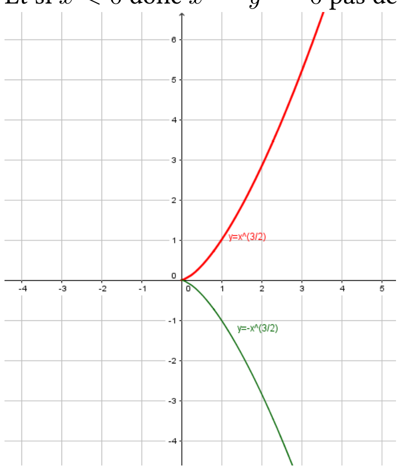
3. Pour $P_3 = x^2 + y^2 - 1$, $\mathcal{V}(P_3(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_3(x, y) = 0\}$.
   $P_3(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ c'est l'equation d'une cercle de centre O et de rayon 1.

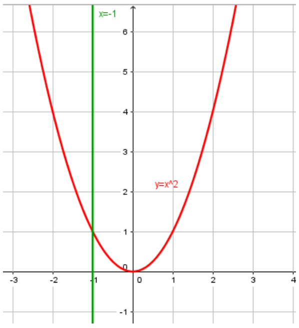
4. Pour $P_4 = x^2 - y$, $\mathcal{V}(P_4(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_4(x, y) = 0\}$.
   $P_4(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$ c'est l'équation d'une parabole.

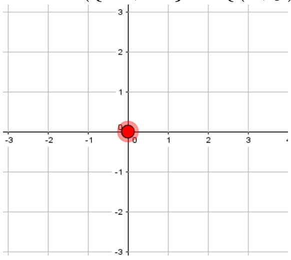
5. Pour $P_5 = x^3 - y^2$, $\mathcal{V}(P_5(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_5(x, y) = 0\}$.
   $P_5(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^2 = 0$
   $\Leftrightarrow$ Si $x \geqslant 0$ sachant que y est un nombre réel, alors : $x^3 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = (x^{3/2}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ y = (x^{-3/2}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   Et si $x < 0$ donc $x^3 - y^3 = 0$ pas de solution.

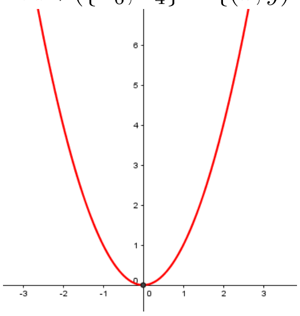
6. Pour $P_6 = x^3 - xy + x^2 - y$, $\mathcal{V}(P_6(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | P_5(x, y) = 0\}$.
   $P_6(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 - xy + x^2 - y = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - y) = 0$
   $\Leftrightarrow x = -1$ ou $y = x^2$ c'est l'union de la droite -1 et P_4.



7. Pour $\mathcal{V}(\{P_1, P_4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x = 0 \text{ ou } y = 0) \text{ et } y = x^2\}$.



8. Pour$\mathcal{V}(\{P_6, P_4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x = -1 \text{ ou } y = x^2) \text{ et } y = x^2\}$.



Lemma 2.2. *Si $A \subset B$ alors $\mathcal{V}(B) \subset \mathcal{V}(A)$.*

Démonstration.
Soit $A \subset B$ et soit $(x,y) \subset \mathcal{V}(B)$, alors, $\forall P \in B, P(x,y) = 0$.
Si (x,y) est racine de tous les polynômes de A car $A \subset B$, alors $(x,y) \in \mathcal{V}(A)$.
Donc $\mathcal{V}(B) \subset \mathcal{V}(A)$.

□

Proposition 2.3. *$(\mathcal{V}(A))_A$ définissent les fermés d'une topologie de Zariski sur $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration.
Pour montrer que $\{\mathcal{V}(P)\}$ définissent une topologie, il faut vérifier les trois axiomes des fermés :

1. On va montrer que $\mathcal{V}(A_1) \cup \mathcal{V}(A_2)$ est un fermé.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2) &= \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists P \in A_1, P(x) \neq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists Q \in A_1, Q(x) \neq 0\} && (5)\\
&= \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists P \in A_1, \exists Q \in A_2, P(x) \neq 0\} et Q(x) \neq 0\} && (6)\\
&= \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists P \in A_1, \exists Q \in A_2, P.Q \neq 0\} && (7)\\
&= \{x \in \mathbb{R}^2 | \exists R \in A_3, R(x) \neq 0\} o A_3 = \{P.Q | P \in A_1 et Q \in A_2\} && (8)\\
&= \mathcal{D}(A_3). && (9)
\end{aligned}$$

Par complémentaire, $\mathcal{V}(A_1) \cup \mathcal{V}(A_2) = \mathcal{V}(A_3)$. Donc la réunion de deux fermés est bien un fermé.

2. On va montrer que l'intersction de parties fermés est un fermé , c'est à dire , on va montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i) = \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.
   ($\subset$) Soit $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i)$, alors, $\forall i \in I, (x, y) \in \mathcal{V}(A_i)$. Donc $\forall i \in I, \forall P \in A_i, P(x, y) = 0$.
   Alors $\forall P \in A_i, P(x, y) = 0$ et donc $(x, y) \in \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.
   D'où $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i) \subset \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.
   ($\supset$) On va montrer que $\mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i)$.
   Soit $X \in \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i) \Rightarrow \forall P \in \bigcup_{i \in I} A_i, P(x) = 0$. Donc $\forall i \in I, \forall P \in A_i, P(x) = 0 \Rightarrow \forall i \in I, x \in \mathcal{V}(A_i) \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i)$.
   D'où $\mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i)$.
   Conclusion : $\bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(A_i) = \mathcal{V}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.

3. On va montrer que $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des fermés.
   Posons $A = \{P\}$ où P est le polynôme nul : $\forall x \in \mathbb{R}^2, P(x) = 0$, donc $\mathcal{V}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 | P(x) = 0\} = \mathbb{R}^2$.
   Donc $\mathbb{R}$ est bien un fermé.
   Posons $A = \{P\}$ où P est le polynôme constant égal à 1 : $\forall x \in \mathbb{R}^2, P(x) = 1$, donc $\mathcal{V}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 | P(x) = 0\} = \emptyset$.
   Donc $\emptyset$ est un fermé.
   Conclusion :

Conclusion :$(\mathcal{V}(A))_A$ définissent bien les fermés d'une topologie de Zariski sur $\mathbb{R}^2$. $\square$