

Candidature aux fonctions de maître de conférences

Frédéric Chardard

Table des matières

1	Curriculum vitae	2
1.1	Coordonnées	2
1.2	Situation professionnelle	2
1.3	Formation	2
1.4	Publications	3
1.5	Enseignement	3
1.6	Participation à des événements scientifiques	4
1.7	Activité de relecteur	6
1.8	Autres	6
2	Pièces complémentaires	6
3	Résumé des activités d'enseignement et de recherche	6
3.1	Activités d'enseignement	6
3.1.1	Colles en classes préparatoires	6
3.1.2	Monitorat	6
3.1.3	Agrégé-préparateur	7
3.2	Activités de recherche	7
3.2.1	L'indice de Maslov dans le cas homocline	7
3.2.2	Équation de Kawahara	9
3.2.3	Instabilité d'écoulements stationnaires au voisinage d'un obstacle	10
3.3	Administration et animation de l'enseignement et de la recherche	11
4	Projet de recherche indicatif	12
4.1	Applications de la théorie de l'indice de Maslov à la stabilité	12
4.1.1	Systèmes unidimensionnels	13
4.1.2	Systèmes multidimensionnels	13
4.2	Structures cohérentes apparaissant dans les modèles dispersifs faiblement non-linéaires avec ou sans forçage	13
4.2.1	Comportement d'un fluide au voisinage d'un obstacle	13
4.2.2	Dérivation d'un modèle dispersif faiblement non-linéaire pour les ondes survenant au niveau d'interfaces diffuses	15
4.3	Étude numérique des solutions des équations de l'optique non-linéaire	15
	Références	16

1 Curriculum vitae

1.1 Coordonnées

Frédéric Chardard

Né le 31 juillet 1982 à Chatenay-Malabry (92)
Nationalité française

Adresse professionnelle

UMPA, ENS de Lyon
46, allée d'Italie
69007 Lyon
04 72 72 81 88

Domicile

Appartement 614
Résidence BedInCity Le Virgile
219, rue Marcel Mérieux
69007 Lyon
04 72 26 07 56

- Téléphone mobile : 06 74 40 29 32
- E-mail : frederic.chardard@ens-lyon.fr
- Web : <http://perso.ens-lyon.fr/frederic.chardard/>

1.2 Situation professionnelle

- Depuis 2009 Agrégé-préparateur à l'ENS Lyon. Membre de l'Unité de Mathématiques Pures et Appliquées (UMPA, UMR 5669).
- 2006-2009 Allocataire de recherche et moniteur à l'ENS Cachan.
- Depuis 2005 Professeur agrégé de mathématiques. Titularisé le 1^{er} septembre 2009.
- 2002-2006 Élève normalien à l'ENS Cachan.

1.3 Formation

- 2005-2009 Doctorat de mathématiques, Centre de Mathématiques et de Leurs Applications (UMR 8536), ENS Cachan.
Thèse sous la direction de Frédéric DIAS sur la «Stabilité des ondes solitaires», soutenue le 15 mai 2009 devant le jury composé de :
- | | | |
|--------------------------|---------------------|--------------------|
| Thomas J. BRIDGES | Surrey, Royaume-Uni | Examineur |
| Frédéric DIAS | ENS Cachan | Directeur de thèse |
| Christopher K.R.T. JONES | UNC, États-Unis | Rapporteur |
| Juan-Pablo ORTEGA | CNRS | Examineur |
| Jean-Claude SAUT | Paris XI | Président |
| Nikolay TZVETKOV | Lille I | Rapporteur |
- 2005 Agrégation de Mathématiques. Reçu 133e.
- 2005 Master 2e année «Équations aux dérivées partielles et calcul scientifique» de l'Université Paris-Sud XI, mention Bien.
Cours suivis :
– Lois de conservation hyperboliques-Équations de Navier-Stokes,
– Méthodes numériques avancées pour les EDP.
Stage de Master encadré par Frédéric DIAS au CMLA sur «Indice de Maslov et stabilité des ondes solitaires».
- 2004 Maîtrise de Mathématiques de l'Université Paris-Sud XI, mention Assez Bien.
- 2003 Licence de Mathématiques de l'Université Paris-Sud XI, mention Bien.

1.4 Publications

Articles parus :

- F.CHARDARD, F.DIAS, T.J.BRIDGES, *Computing the Maslov index of solitary waves. Part 2 : Hamiltonian systems on a 2n-dimensional phase space*, Physica D **240** (2011), 1334–1344.
- F.CHARDARD, F.DIAS, H.Y. NGUYEN, J.M. VANDEN-BROECK, *Stability of some stationary solutions to the forced KdV equation with one or two bumps*, Journal of Engineering Mathematics, **70** (2011), 175–189.
- F. CHARDARD, F. DIAS & T. J. BRIDGES, *Computing the Maslov index of solitary waves. part 1 : Hamiltonian systems on a 4-dimensional phase space*, Physica D **238** (2009), no. 18, 1841–1867.
- F. CHARDARD, F. DIAS & T.J. BRIDGES. *On the Maslov index of multi-pulse homoclinic orbits*, Proc. Royal Soc. London A **465** (2009), 2897–2910.
- F.CHARDARD, *Maslov index for solitary waves obtained as a limit of the Maslov index for periodic waves*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **345/12** (2007), 689–694.
- F.CHARDARD, F.DIAS, T.J.BRIDGES, *Fast computation of the Maslov Index for hyperbolic linear systems with periodic coefficients*, Journal of Physics A : Mathematical and General **39** (2006), no. 47, 14545–14557.

Article soumis :

- T.J. BRIDGES & F. CHARDARD, *Transversality of homoclinic orbits, the Maslov index, and the symplectic Evans function*, soumis à Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.

1.5 Enseignement

Depuis 2009

Agrégé-préparateur au département de mathématiques de l'ENS Lyon.

- Agrégation : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Leçons d'analyse (12h)} \\ \text{Cours de géométrie différentielle (3 \times 14h)} \\ \text{TD Distributions (4h+4h)} \\ \text{Préparation option B (Analyse numérique) (14h+16h+20h)} \\ \text{Oraux blancs (Analyse/Algèbre) (12h)} \\ \text{Écrits blancs (4 sujets d'analyse)} \end{array} \right.$
- Licence 3/Master 1 : Jury de soutenance de stage (6h+3h+3h)
- Licence 3 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{TD Calcul différentiel (20h)} \\ \text{TD Topologie (20h)} \\ \text{TD Analyse numérique (14h)} \end{array} \right.$
- Licence 1 et 2 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Colles en Licence 1 (4h)} \\ \text{Relecture d'un sujet du concours d'entrée de l'ENS Lyon} \end{array} \right.$

2006-2009

Monitorat au département de mathématiques de l'ENS Cachan.

- Agrégation : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Oraux blancs de modélisation et d'analyse (14h + 4h + 20h)} \\ \text{TD Analyse numérique (6h+14h)} \end{array} \right.$
- Master 2 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{TD Différences finies, Éléments finis, Volumes finis (21h+21h+15h)} \\ \text{TD Résolution de grands systèmes linéaires (10h+18h)} \end{array} \right.$
- Master 1 : TD Analyse numérique matricielle (8h+12h)

2003-2006 120 heures d'interrogation en classes préparatoires, 2e année, filière MP (Lycée Blaise Pascal, Orsay, 91).

1.6 Participation à des événements scientifiques

Conférences et congrès

- Juin 2012 (à venir) Conférence SIAM «Non-linear Waves and Coherent Structures», Seattle, Washington, États-Unis d'Amérique.
Exposé : «On the stability of some periodic waves arising in the Kawahara equation».
- Juillet 2011 Institute of Mathematics and its Applications Conference on Nonlinearity and Coherent Structures, Reading, Royaume-Uni
- Juin 2011 Conférence «Équations dispersives non-linéaires», Institut Henri Poincaré, Paris.
- Mai 2009 Congrès SMAI 2009, La Colle-sur-Loup, France.
Exposé : «Calcul numérique de l'indice de Maslov des ondes solitaires multimodales».
- Mars 2009 6^e conférence IMACS «Non-linear Evolution Equations and Wave Phenomena : Computation Methods and Theory», Athens, Géorgie, États-Unis d'Amérique.
Exposé : «Computing the Maslov index of multi-pulse solitary waves».
- Juillet 2008 Conférence SIAM «Non-linear Waves and Coherent Structures», Rome, Italie.
Exposé : «Maslov Index and Applications to the Stability of Solitary Waves».
- Juin 2007 Congrès SMAI 2007, Praz-sur-Arly, France.
Exposé : «Compter les valeurs propres avec l'indice de Maslov. Cas des solutions «ondes solitaires» de l'équation de Korteweg de Vries du 5e ordre».
- Septembre 2006 Conférence SIAM «Non-linear Waves and Coherent Structures», Seattle, Washington, États-Unis d'Amérique.
Exposé : «Computing the Maslov index of solitary waves»
- Juin 2006 Conférence «Geometry and Mechanics», Université de Surrey, Royaume-Uni.
Exposé : «Computing the periodic Maslov Index».

Exposés lors de groupes de travail et de séminaires

- Juillet 2011 Séminaire au département de mathématiques de l'université de Surrey, Guildford, Royaume-Uni. Exposé sur «Maslov index and spectral stability».
- Mars 2010 Séminaire d'équations aux dérivées partielles de l'université de Besançon. Exposé sur «Indice de Maslov et stabilité spectrale : cas d'ondes périodiques et solitaires survenant dans des équations dispersives hamiltoniennes.»
- Novembre 2009 Séminaire à l'université de Warwick. Exposé sur «The Maslov index of periodic and solitary waves arising in dispersive equations».
- Novembre 2009 Journées Équations aux Dérivées Partielles Rhône-Alpes Auvergne. Exposé sur «Indice de Maslov des ondes périodiques et solitaires survenant dans des équations dispersives».

- Avril 2009 Séminaire EDP² du LAMA-Université de Savoie. Exposé sur «Applications de la théorie de l'indice de Maslov à la stabilité de solutions stationnaires d'équations aux dérivées partielles hamiltoniennes».
- Novembre 2008 Groupe de travail des doctorants de Cachan. Exposé sur «L'indice de Maslov des ondes solitaires multi-modales».
- Mai 2008 Rencontres Mathématiques de Cachan. Exposé sur «Valeurs propres, systèmes hamiltoniens. Applications à l'étude de la stabilité des solutions ondes solitaires de l'équation de Kawahara».
- Novembre 2007 Groupe de travail des doctorants de Cachan. Exposé sur «Présentation de l'indice de Maslov et de son utilisation comme compteur de valeurs propres».
- Mars 2006 Groupe de travail Mécanique des Fluides Réels de l'ENS Cachan. Exposé sur «Calcul de l'indice de Maslov pour les lacets».

Cours et ateliers

- Novembre 2011 Journées EDP Rhône-Alpes Auvergne, Grenoble.
- Février 2011 MathOcéan, Chambéry.
- Janvier 2011 Math à Bayonne, sur les équations dispersives.
- Novembre 2010 Journées EDP Rhône-Alpes Auvergne, Lyon.
- Juin 2010 Journées EDP, Port d'Albret.
- Novembre 2009 Journées EDP Rhône-Alpes Auvergne, Grenoble. Exposé sur «Indice de Maslov des ondes périodiques et solitaires apparaissant dans certaines équations dispersives».
- Mars 2009 Session du GDR MOAD (Modélisation, Asymptotique, Dynamique Non-linéaire), Grenoble, France. Exposé sur «L'indice de Maslov des ondes solitaires multi-modales».
- Septembre 2008 Atelier sur «Modélisations physico-numériques pour les fluides, les particules et le rayonnement. Confrontation modèles physiques et modèles numériques» Cargèse, France.
- Juillet 2008 Atelier «NLW'08 Workshop : Multidimensional Localized Structures», Rome, Italie.
- Mars 2008 Session du GDR MOAD, Lyon, France.
- Janvier 2008 Cours Peccot (par Karine Beauchard) sur «Contrôle d'équations de Schrödinger».
- Octobre 2006 Session du GDR MOAD, CIRM, Marseille, France.
- Septembre 2006 Atelier sur «Modélisations physico-numériques pour les fluides, les particules et le rayonnement. Confrontation modèles physiques et modèles numériques» Cargèse, France.
- Septembre 2006 Atelier «Stability and instability of non-linear waves», Seattle, Washington, États-Unis.
- Janvier 2006 Cours avancés sur «Nonlinear Waves in PDEs», Université de Surrey, Royaume-Uni.

1.7 Activité de relecteur

- European Journal of Mechanics - B/Fluids
- European Physical Journal - Applied Physics (EPJAP)
- Mathscinet
- Images des mathématiques (site de vulgarisation)

1.8 Autres

Langues Anglais (lu, parlé, écrit), allemand (niveau scolaire)
Informatique Scilab, Matlab, Maple, C/C++, Latex, (MS/Open)Office, Linux, Windows,
 HTML/CSS/PHP/SQL
Permis B

2 Pièces complémentaires

Si je suis retenu pour l'audition, j'adresserai à la commission mes 6 articles parus mentionnés à la section 1.4 ainsi que ma thèse de doctorat.

Par ailleurs, ces documents sont disponibles à l'URL ci-dessous :

http://perso.ens-lyon.fr/frederic.chardard/?d=travaux_chardard.zip

3 Résumé des activités d'enseignement et de recherche

3.1 Activités d'enseignement

3.1.1 Colles en classes préparatoires

Au cours de ma scolarité à l'ENS Cachan, j'ai donné de 2003 à 2006 des colles au lycée Blaise Pascal à Orsay, pour des élèves en 2e année de la section Mathématiques-Physique, à raison de 2 heures par semaine, soit un total de 120 heures.

3.1.2 Monitorat

Mon allocation de recherche, qui a commencé en 2006, une année après le début de ma thèse, était couplée à un monitorat, effectué au sein du département de mathématiques de l'ENS Cachan représentant l'équivalent de 64 heures de travaux dirigés par an.

Environ la moitié de mon service était constituée de travaux dirigés et de travaux pratiques destinés aux étudiants du Master 2 MN2MC/M2S (Méthodes Numériques pour les Modèles des Milieux Continus/Master de simulation), issus pour la plupart de formations en ingénierie, informatique ou physique. Le sujet de ces TD était d'une part une introduction aux différences finies, éléments finis et volumes finis, d'autre part les méthodes d'inversion et de calcul de valeurs propres pour les grands systèmes linéaires. Dans les deux cas, j'ai participé à la conception des feuilles d'exercices.

Une autre partie de mon service concernait la préparation des élèves de l'ENS Cachan à l'agrégation. À ce titre, j'ai fait partie de jurys d'oraux blancs de modélisation (option calcul scientifique) et d'analyse. De plus, j'ai assuré quelques travaux dirigés et travaux pratiques.

La dernière partie de mon monitorat était constituée de travaux dirigés de Master 1 pour un module d'analyse numérique matricielle destiné aux élèves de deuxième année de l'ENS Cachan.

3.1.3 Agrégé-préparateur

Je suis depuis septembre 2009 agrégé-préparateur et assure à ce titre l'équivalent de 80 heures de travaux dirigés par an au sein du département de Mathématiques de l'ENS Lyon.

Une partie de mon service est constituée de travaux dirigés de calcul différentiel, de topologie et d'analyse numérique pour des étudiants en troisième année de licence. Par ailleurs je participe à la rédaction des feuilles d'exercices.

Dans le cadre de la préparation des élèves de l'ENS Lyon à l'agrégation, j'encadre des leçons d'analyse et assure un cours sur la géométrie différentielle ainsi qu'une partie des cours et travaux pratiques pour l'option B (Calcul scientifique) et j'ai corrigé plusieurs écrits blancs.

J'ai également participé aux jurys de soutenance des élèves de Licence 3 et de Master 1.

3.2 Activités de recherche

Mes travaux, réalisés dans le cadre de ma thèse (2005-2009) sous la direction de Frédéric Dias (University College of Dublin et CMLA-ENS Cachan) au CMLA-ENS Cachan puis au sein de l'UMPA-ENS Lyon (2009-), s'articulent autour de trois thèmes :

- l'étude et le calcul numérique de l'indice de Maslov (une des applications de cet indice concerne les deux autres thèmes),
- la stabilité d'ondes solitaires survenant dans l'équation de Kawahara,
- la stabilité de solutions stationnaires de l'équation de Korteweg-de Vries avec forçage.

Comme mentionné page 3, ils ont donné lieu à sept articles, dont six publiés. Ils ont été réalisés en collaboration avec Thomas J. Bridges (University of Surrey, Royaume-Uni) mais aussi Jean-Marc Vanden-Broeck (University College of London) et Hai Yen Nguyen (Centre National de Recherches Météorologiques, Toulouse).

3.2.1 L'indice de Maslov dans le cas homocline

Considérons un problème spectral $\mathcal{L}u = \mu u$ avec \mathcal{L} auto-adjoint et $\mu \in \mathbb{R}$ pouvant se mettre sous la forme d'un système linéaire hamiltonien de dimension finie :

$$U_x = JA(x, \mu)U, \tag{1}$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, A symétrique et U un vecteur dont les composantes sont des combinaisons linéaires des dérivées de u . De tels opérateurs \mathcal{L} se rencontrent par exemple lorsque l'on considère la hessienne d'une fonctionnelle (voir section 3.2.2).

Pour des problèmes de cette sorte, il est possible d'utiliser la théorie de l'indice de Maslov pour compter les valeurs propres de \mathcal{L} inférieures à un réel μ .

Deux cas ont été étudiés :

- $A(x, \mu)$ est L -périodique suivant la variable x ,
- $A(x, \mu)$ converge exponentiellement vers $A_\infty(\mu)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ (cas dit homocline).

Alors que l'indice de Maslov pour des systèmes périodiques a été bien étudié du fait de ses applications en quantification semi-classique et mécanique classique, ce n'est pas le cas de l'indice de Maslov pour le cas homocline. Ce dernier a été introduit dans [7] pour étudier la stabilité d'ondes progressives survenant dans des équations de type FitzHugh-Nagumo, et également dans [21].

Le cas homocline vu comme une limite

L'indice de Maslov pour les ondes solitaires peut aussi être défini comme une limite : lorsqu'une suite de systèmes périodiques $U_x = JA^\alpha(x, \mu)U$ converge vers un système homocline

$U_x = JA(x, \mu)U$, nous avons prouvé en utilisant un résultat de Gardner [36] que la suite des indices de Maslov converge et sa limite peut être utilisée comme définition pour l'indice de Maslov pour le système homocline.

La limite, appelée indice de Maslov $I(\mu)$ du système (1), existe lorsque μ n'est pas dans le spectre de \mathcal{L} : l'espace des solutions qui tendent vers 0 en $-\infty$, appelé espace instable, est un lacet dans la variété $\Lambda(n)$ des sous-espaces lagrangiens (un sous-espace E est dit lagrangien si sa dimension est n et si $\forall x, y \in E, {}^T x J y = 0$). Le groupe fondamental de cette variété étant \mathbb{Z} , il est possible d'attribuer un entier à chaque lacet fermé. $I(\mu)$ est égal à l'entier associé au chemin décrit par l'espace instable. Sous certaines hypothèses, $I(\mu)$ est aussi égal au nombre de valeurs propres de \mathcal{L} inférieures à μ .

Le cas où μ est dans le spectre discret a aussi été étudié, mais c'est un cas plus difficile, pour lequel il n'y pas nécessairement convergence.

Calcul numérique de l'indice de Maslov

Nous avons développé un algorithme basé sur l'algèbre extérieure, permettant de calculer l'indice de Maslov dans les cas périodique et homocline.

Dans l'algèbre extérieure de \mathbb{R}^{2n} , chaque sous-espace $\text{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de dimension n peut être représenté par une n -forme $U_1 \wedge \dots \wedge U_n$, unique à une multiplication par un scalaire près (cf [13] par exemple). De plus, si $(U_i)_x = A(x, \mu)U_i$, alors $U_1 \wedge \dots \wedge U_n$ vérifie une équation différentielle linéaire $(U_1 \wedge \dots \wedge U_n)_x = A^{(n)}(x, \mu)(U_1 \wedge \dots \wedge U_n)$.

Cela permet d'éviter des problèmes de raideur : si l'on prenait une base du sous-espace et que l'on intégrait l'équation (1) sur chacun des vecteurs, ces vecteurs pourraient être attirés dans la même direction, et de ce fait les autres directions du sous-espace seraient perdues.

Pour le cas périodique, nous avons proposé d'intégrer le système sur plusieurs périodes pour obtenir l'espace instable.

Dans le cas homocline, nous avons pris en revanche comme condition initiale la n -forme propre associée à la valeur propre de plus grande partie réelle de $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)}(x, \mu)$.

Nous avons également donné une procédure pour calculer l'indice de Maslov d'un chemin *ouvert* (la définition est alors différente) de $\Lambda(n)$ à partir de sa représentation dans l'algèbre extérieure. Cela peut être utile lorsque μ est dans le spectre ou pour étudier des systèmes qui ne sont plus homoclines à un point mais hétéroclines ou homoclines à un cycle.

Nous avons appliqué cet algorithme pour des problèmes spectraux survenant dans les équations de résonance entre ondes longues et ondes courtes (cf [40] pour une description de ces équations) ainsi qu'à l'équation de Kawahara mentionnée plus bas.

Nous avons également utilisé l'orthogonalisation afin de pouvoir calculer l'indice de Maslov lorsque n est grand, évitant ainsi l'explosion du nombre de dimensions.

Indice d'orientation et invariant de Lazutkin

D'autres outils topologiques ont été utilisés pour étudier la stabilité de structures cohérentes, notamment des indices d'orientation [1, 2]. Alors que la définition de ces indices repose habituellement sur l'introduction d'un paramètre de bifurcation, il est possible dans le cas hamiltonien d'utiliser à la place la forme symplectique ω .

Plus précisément, soit γ une orbite homocline d'un système hamiltonien autonome de dimension 4. Soient $T_{\gamma(x)}W^s = \text{vect}(\gamma'(x), a^s(x))$ et $T_{\gamma(x)}W^u = \text{vect}(\gamma'(x), a^u(x))$ les espaces tangents des variétés respectivement stable et instable en $\gamma(x)$, avec a^s, a^u des solutions de l'équation linéarisée le long de l'orbite γ . Lorsque ces deux espaces sont distincts, l'orbite est dite transverse et la quantité

$$\mathcal{I}(x) = \omega(a^s(x), a^u(x))$$

est non nulle, indépendante de x et appelée invariant de Lazutkin [41].

Le signe de \mathcal{I} définit un indice d'orientation et nous avons montré que pour une normalisation naturelle de a^s et a^u , ce signe donne la parité de l'indice de Maslov. Cette propriété se généralise naturellement aux dimensions supérieures.

L'invariant de Lazutkin intervenant dans l'analyse des enchevêtrements homoclines, qui apparaissent notamment dans l'équation différentielle 4 mentionnée ci-dessous, on peut s'attendre à ce que la relation que nous avons démontrée aide à comprendre l'indice de Maslov des orbites associées.

3.2.2 Équation de Kawahara

Lorsque l'on prend en compte la capillarité dans les modèles dispersifs faiblement non-linéaires pour les vagues en eaux peu profondes, la dispersion cubique peut devenir très faible. Il faut alors prendre en compte des termes comportant des dérivées d'ordre supérieur [39] et l'on obtient l'équation de Kawahara, qui est aussi utilisée pour décrire des plasmas :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{u}^{q+1}) + P \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 \mathbf{u}}{\partial x^5} = 0, \quad q \geq 1. \quad (2)$$

Si on se place dans un référentiel se déplaçant à la vitesse c , l'équation devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (u^{q+1}) + P \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0, \quad q \geq 1. \quad (3)$$

Cette équation admet des ondes solitaires, c'est-à-dire des solutions stationnaires ϕ tendant exponentiellement vers 0 en $\pm\infty$ dans un référentiel se déplaçant à une vitesse c . On a alors

$$\phi'''' - P\phi'' + c\phi - \phi^{q+1} = 0. \quad (4)$$

Durant la thèse, nous avons souhaité déterminer la stabilité spectrale de ces solutions, c'est-à-dire l'absence de modes propres ayant une croissance exponentielle pour l'équation aux dérivées partielles linéarisée autour de ϕ .

Modes propres instables et indice de Maslov

L'équation de Kawahara est hamiltonienne car elle peut être mise sous la forme $u_t = \mathcal{J}\nabla H$, où $\mathcal{J} = \frac{\partial}{\partial x}$ est un opérateur antisymétrique et $H(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{P}{2}u_x^2 - \frac{1}{q+2}u^{q+2} + \frac{c}{2}u^2 \right) dx$ le hamiltonien. Les ondes solitaires ϕ sont alors les points critiques de H .

L'équation linéarisée de (2) autour de ϕ s'écrit $u = \partial_x \mathcal{L}u$, avec $\mathcal{L}u = (u_{xxxx} - P u_{xx} - (q+1)\phi^q u + cu)$ la hessienne de H en ϕ . Lorsque ϕ est symétrique, la stabilité spectrale de ϕ est liée d'après [22], au nombre l de valeurs propres strictement négatives de \mathcal{L} :

$$l = \#\{\text{Modes propres oscillants propres d'énergie négative de } \partial_x \mathcal{L}\} + \#\{\text{Modes propres instables de } \partial_x \mathcal{L}\} + r \quad (5)$$

$$\text{avec } r = \begin{cases} 1 & \text{si } \int_{\mathbb{R}} \phi\psi > 0 \\ 0 & \text{si } \int_{\mathbb{R}} \phi\psi < 0 \end{cases} \quad \text{et } \psi \text{ tel que } \mathcal{L}\psi = \phi.$$

Le problème spectral $\mathcal{L}u = \mu u$ peut alors se mettre sous la forme (1) et l'on peut donc utiliser l'indice de Maslov pour évaluer $l = \lim_{\mu \rightarrow 0^-} I(\mu)$.

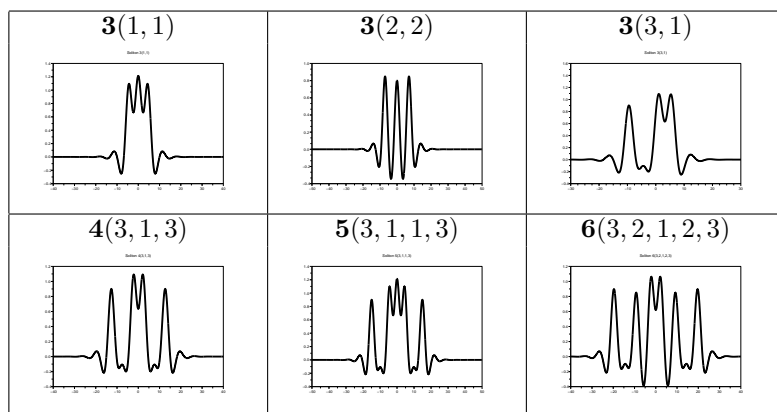


FIGURE 1 – Quelques ondes solitaires multimodales de l'équation de Kawahara lorsque $P = -1.5$, $c = 1$ et $q = 1$.

Ondes solitaires multi-modales

Pour certaines valeurs de P et c , l'équation de Kawahara admet une infinité de solutions de type onde solitaire, chacune constituée de plusieurs impulsions, qui ne peuvent être calculées que numériquement, par exemple avec une méthode de tir. Ces solutions dites multimodales peuvent être classifiées [14] au voisinage de $P = 2^-$ par une suite d'entiers $\mathbf{n}(i_1, \dots, i_{n-1})$ où n est le nombre de «grands maxima» de ϕ et i_k représente la distance entre le k -ème et le $k + 1$ -ème «grand maximum». Certaines de ces solutions sont représentées à la figure 1.

Numériquement, nous avons trouvé que la suite d'entiers i_1, \dots, i_{n-1} donnait la valeur de l'indice de Maslov de cette onde :

$$l = \lim_{\mu \rightarrow 0^-} I(\mu) = 1 + \#\{1 \leq k \leq n-1 | i_k \text{ pair}\} + 2\#\{1 \leq k \leq n-1 | i_k \text{ impair}\}$$

En calculant la valeur de r , il est alors possible de montrer que certaines solutions sont instables par un argument de parité.

Lorsque la parité n'était pas suffisante pour conclure, nous avons localisé les valeurs propres de $\partial_x \mathcal{L}$ en calculant avec l'algorithme proposé dans [13] la fonction d'Evans associée $D(\lambda)$, une fonction analytique dont les zéros sont précisément les valeurs propres.

Toutes les ondes multi-modales testées avaient des modes propres instables. Néanmoins, certains de ces modes propres semblent avoir une croissance très faible et il est donc possible que certaines de ces solutions puissent être observées de manière transitoire.

Nous avons également étudié le comportement de l'indice de Maslov le long des branches de solutions lorsque l'on fait varier le paramètre P et précisé de quelle manière l'indice de Maslov variait au voisinage des bifurcations de type fourche et des coalescences.

3.2.3 Instabilité d'écoulements stationnaires au voisinage d'un obstacle

Un autre sujet est l'étude des écoulements stationnaires survenant au voisinage d'un obstacle. Nous avons utilisé, comme dans [30], le modèle de Korteweg-de Vries avec forçage :

$$\eta_t = \frac{1}{6}\eta_{xxx} + \frac{3}{4}(\eta^2)_x - (F-1)\eta_x + \frac{1}{2}B_x, \quad (6)$$

avec η la hauteur d'eau et B la forme du fond.

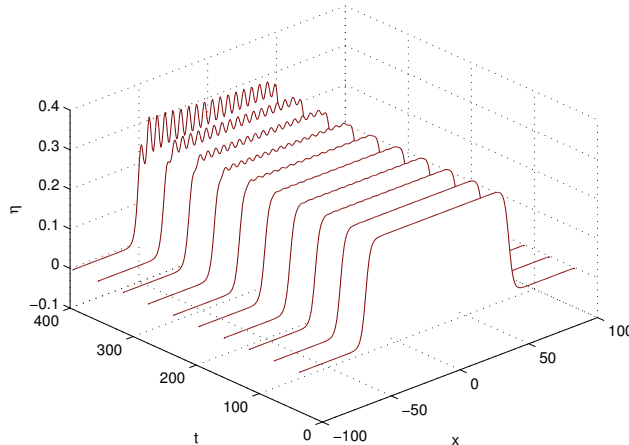


FIGURE 2 – Évolution de la solution en forme de table pour $L = 52$, $\beta = -0.3$ et $F = 1.2$.

Par exemple, deux obstacles distants peuvent engendrer un écoulement en forme de table :

$$\eta = A \tanh(\beta(x + L)) - A \tanh(\beta(x - L)), \quad A = \frac{2}{3}(F - 1)$$

Nous avons prouvé qu'au moins une infinité de ces solutions étaient instables. Cela peut être fait en utilisant la théorie de Sturm-Liouville qui est un cas particulier de la théorie de l'indice de Maslov en dimension 1. L'évolution de l'une de ces solutions est montrée à la figure 2.

Nous avons également étudié numériquement la stabilité de solutions de type ressaut hydraulique :

$$\eta = \frac{2}{3}(F - 1)(1 + \tanh \beta x)$$

Ces simulations ont confirmé la pertinence de la condition de radiation, puisque le ressaut apparaît instable pour $\beta < 0$.

Conclusion et perspectives

Avec le complexe de Chern et les indices d'orientation, l'indice de Maslov est un autre outil topologique qui permet de relier la forme de l'onde solitaire à sa stabilité. On pourrait vouloir étendre ce cadre de travail aux ondes solitaires généralisées (c'est-à-dire des orbites homoclines à des cycles pour le problème stationnaire) ou d'autres structures cohérentes ainsi que transposer les résultats de stabilités aux solutions des équations d'Euler avec une surface libre.

Pour les modèles de Kawahara et de Korteweg-de Vries avec forçage, il reste également de nombreux types de solutions stationnaires ou périodiques en temps à étudier.

3.3 Administration et animation de l'enseignement et de la recherche

Jun 2012	Coorganisation d'un minisymposium sur «Hamiltonian and symplectic methods in the theory of nonlinear waves» à la conférence SIAM «Non-linear Waves and Coherent Structures», Seattle, Washington, États-Unis d'Amérique.
Depuis 2010	Membre du conseil du département de mathématiques de l'ENS Lyon.

Depuis 2009	Promotion des mathématiques en lycée et collège dans le cadre de l'exposition itinérante «Math À Lyon».
2007-2008	Coorganisation des Rencontres Mathématiques de Cachan (13 décembre 2007 et 20 mai 2008).
2006-2007	Représentant des doctorants au conseil de l'école doctorale.
2006	Coorganisation des Rencontres pour l'Emploi des Docteurs de Cachan (20-22 novembre).
2006	Coorganisation de l'atelier Cargèse 2006 sur «Modélisations physico-numériques pour les fluides, les particules et le rayonnement. Confrontation modèles physiques et modèles numériques» (25-29 septembre).

En 2006-2007, j'ai été représentant des doctorants auprès du conseil de l'École Doctorale Sciences Pratiques (l'école doctorale de l'ENS Cachan) et ai fait partie du comité d'organisation des Rencontres pour l'emploi des docteurs en 2006, dont le but était de donner un aperçu des débouchés du doctorat dans le secteur public et privé.

Dans le cadre de ma thèse, j'ai également organisé un atelier d'une semaine à Cargèse en septembre 2006 avec Denys Dutykh sur «Modélisations physico-numériques pour les fluides, les particules et le rayonnement. Confrontation des modèles physiques et des modèles numériques». À ce titre, nous avons géré les inscriptions et le programme de cette manifestation et servi de relais entre les participants et l'Institut d'Études Scientifiques de Cargèse.

En tant que moniteur, j'ai aidé à mettre en place les Rencontres Mathématiques de Cachan en 2007-2008, dont le but était de donner aux élèves de l'ENS Cachan un aperçu de la recherche au travers d'exposés de leurs prédécesseurs actuellement en thèse.

Depuis mars 2010, je suis membre élu au conseil du département de mathématiques de l'ENS Lyon. Enfin, je coorganise cette année avec Thomas J. Bridges un minisymposium sur les méthodes hamiltoniennes et symplectiques dans la théorie des ondes non-linéaires au sein de la conférence SIAM «Non-linear Waves and Coherent Structures» qui se tiendra à Seattle en juin 2012.

4 Projet de recherche indicatif

Mon projet de recherche s'articule autour de trois thèmes :

- l'étude de la stabilité de structures cohérentes apparaissant dans des modèles d'ondes dispersives faiblement non-linéaires, avec ou sans forçage.
- la dérivation d'un modèle dispersif faiblement non-linéaire à partir d'équations décrivant un système avec une interface diffuse.
- l'étude numérique des solutions des équations de l'optique non-linéaire.

Les deux premiers axes de recherche sont dans la continuité du travail réalisé au CMLA-ENS Cachan puis à l'UMPA-ENS Lyon décrit précédemment. Par ailleurs, le dernier axe fait partie d'un travail en cours.

4.1 Applications de la théorie de l'indice de Maslov à la stabilité

L'indice de Maslov est un entier que l'on peut attribuer à des chemins dans la variété des plans lagrangiens. Il permet de généraliser la théorie de Sturm-Liouville et de relier le nombre de valeurs propres d'un opérateur à la topologie de l'une de ses fonctions propres.

Les structures cohérentes sont souvent les points critiques d'une fonctionnelle. C'est le cas par exemple pour les solutions stationnaires des équations aux dérivées partielles hamiltoniennes et les systèmes de type flot de gradient.

Dans ces deux cas, l'indice de Maslov compte le nombre de valeurs propres négatives ou positives de la hessienne de cette fonctionnelle.

4.1.1 Systèmes unidimensionnels

Dans le cas de la dimension 1, trouver les valeurs propres de la hessienne de cette fonctionnelle est équivalent à résoudre une famille d'équations différentielles ordinaires hamiltoniennes linéaires :

$$U_x = JA(x, \lambda)U \quad (7)$$

avec $A(x, \lambda)$ symétrique.

Lorsque l'espace instable (c'est-à-dire l'ensemble des solutions tendant vers 0 quand $x \rightarrow -\infty$) de (7) pour $\lambda = 0$ est lagrangien et qu'il s'agit d'une onde solitaire ou périodique, il est possible de définir un indice de Maslov pour l'onde à partir de ce chemin. Cette construction s'inspire de celle de la fonction d'Evans, un déterminant pour les opérateurs de dimension infinie, utilisée notamment dans les articles de S.Benzoni-Gavage, D.Serre et K.Zumbrun [5, 6].

Au cours de la thèse, nous avons décrit et implémenté en \mathbb{C} un algorithme permettant de calculer l'indice de Maslov dans les cas des ondes solitaires et des ondes périodiques hyperboliques [19, 18, 20].

Nous souhaitons étudier le cas des fronts et des ondes solitaires noires. Les ondes solitaires noires ont par exemple été décrites dans le cas de l'équation de Schrödinger non-linéaire et dans un modèle pour les ondes interfaciales en profondeur infinie [29].

4.1.2 Systèmes multidimensionnels

C.K.R.T Jones et J. Deng [26, 28, 27] ont introduit un indice de Maslov pour étudier la stabilité de systèmes bidimensionnels définis sur des ouverts Ω étoilés réguliers bornés comme :

$$u_t = \Delta u + f(u) \text{ sur } \Omega, \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Lorsque f est C^2 et que u_0 est une solution stationnaire C^1 , le problème spectral

$$\Delta v + f'(u_0)v = \lambda v \text{ avec } v = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

peut se ramener à un système linéaire hamiltonien sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Il est alors possible de définir un indice de Maslov pour u_0 .

Il serait intéressant de pouvoir traiter le cas où Ω est seulement simplement connexe. L'intérêt d'une telle approche est qu'elle transforme un problème en dimension N en un problème en dimension $N - 1$, ce qui peut représenter une économie substantielle de calcul. De plus, cela permet de relier la géométrie de la solution au problème spectral.

4.2 Structures cohérentes apparaissant dans les modèles dispersifs faiblement non-linéaires avec ou sans forçage

4.2.1 Comportement d'un fluide au voisinage d'un obstacle

Un autre sujet d'étude en cours est la stabilité d'écoulements stationnaires autour d'un obstacle. Le modèle que l'on utilise est l'équation de Korteweg de Vries avec un terme de forçage :

$$\eta_t = \frac{1}{6}\eta_{xxx} + \frac{3}{4}(\eta^2)_x - (F - 1)\eta_x + \frac{1}{2}B_x, \quad (8)$$

Les travaux de Camassa et Wu [17] ont permis de déterminer la stabilité d'écoulements survenant au voisinage d'obstacles de la forme $B(x) = \alpha \operatorname{sech}^p(\beta x)$.

Le cas d'un fond rugueux a également été étudié par D.Bresch et D.Gérard-Varet pour l'équation de Saint-Venant [12] et par Craig et al. [24] pour des modèles dispersifs faiblement non-linéaires.

En revanche, peu d'études se sont penchées sur le cas des obstacles *multiples* , c'est à dire pour un fond comportant plusieurs maximums séparés par des zones plates.

Enfin, une autre problème que l'on souhaite étudier est l'effet d'un fond rugueux sur ces écoulements comme cela a été fait pour le cas de l'équation de Saint-Venant [12].

Étude d'un modèle prenant en compte la capillarité

Lorsque la capillarité compense le terme de dispersion cubique dans l'équation de Korteweg-de Vries, il est nécessaire de prendre en compte les effets dispersifs d'ordre supérieur et l'on obtient l'équation de Kawahara :

$$\eta_t - c\eta_x + \alpha\eta_{xxx} + \beta\eta_{xxxxx} + K\eta\eta_x = 0$$

Daripa [25] a également fourni un modèle avec une propagation bidirectionnelle. De la même manière que pour Korteweg-de Vries, il existe une extension de type Kadomtsev-Pitviashvili à l'équation de Kawahara (voir par exemple [44]) pour le cas d'un fluide tridimensionnel :

$$(\eta_t - c\eta_x + \alpha\eta_{xxx} + \beta\eta_{xxxxx} + K\eta\eta_x)_x \pm \eta_{yy} = 0.$$

Stabilité d'ondes solitaires et d'ondes périodiques

Pour certains paramètres, l'équation stationnaire associée à l'équation de Kawahara admet une infinité de solutions ([14]) avec des extrémités oscillantes. Ces dernières peuvent être classées par une suite d'entiers $n(i_1, \dots, i_{n-1})$ où n représente le nombre de «grands maximums» de l'onde solitaire et i_k représente la distance entre 2 de ces «grands maximums». Ces solutions ne peuvent être obtenues que numériquement, en utilisant comme cela été fait dans la thèse une méthode de collocation spectrale ou une méthode de tir.

Au cours de la thèse, nous avons calculé numériquement l'indice de Maslov de ces ondes solitaires, ce qui a donné le nombre maximal de modes propres instables.

Nous avons également calculé numériquement les valeurs propres de la linéarisation de l'équation de Kawahara autour de ces solutions en utilisant l'algorithme présenté dans [13]. Il semble qu'il existe d'autres modes instables que ceux prédits dans [15, 23]. Cependant, ces modes auraient une croissance très lente et une étude théorique serait souhaitable pour confirmer leur existence.

Nous souhaitons également étudier la stabilité d'ondes périodiques de grande amplitude, celles de petite amplitude ayant été traitées dans [37].

Prise en compte des effets dissipatifs

Le domaine de validité de l'équation de Kawahara et celle de Daripa correspond pour un fluide comme l'eau à une profondeur de 0.5cm . Pour cette profondeur, le nombre de Reynolds est d'environ 1000. Cela signifie qu'il faudrait prendre en compte les effets dissipatifs.

Cela par exemple été fait pour les équations de Saint-Venant [8] et les équations de Boussinesq [33].

Concernant le caractère bien posé de ces modèles dissipatifs, nous pensons nous inspirer des travaux de D.Bresch et B.Desjardins [8] et de ceux de L.Molinet [42] pour une version dissipative de l'équation de Korteweg-de Vries.

Une fois ce modèle obtenu, il sera possible de fournir une estimation du temps de vie des ondes solitaires.

4.2.2 Dérivation d'un modèle dispersif faiblement non-linéaire pour les ondes survenant au niveau d'interfaces diffuses

Alors que les modèles dispersifs faiblement non-linéaires pour des systèmes comportant une surface libre sont courants, ce n'est pas le cas pour les systèmes avec une interface diffuse.

De tels modèles ont par exemple été obtenus dans le cas monofluide par S.Benzoni-Gavage, R.Danchin, S.Descombes et D.Jamet [3, 4, 9].

Pour le cas bifluide, F.Dias, D. Dutykh et J.-M. Ghidaglia [32] ont récemment présenté un modèle pour un système comportant deux fluides (distingués dans les équations ci-dessous par + et -) :

$$\begin{cases} (\alpha^+ \rho^+)_t + \nabla \cdot (\alpha^+ \rho^+ \vec{u}) = 0, \\ (\alpha^- \rho^-)_t + \nabla \cdot (\alpha^- \rho^- \vec{u}) = 0, \\ (\rho \vec{u})_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u} + p \mathbb{I}) = \rho \vec{g}, \\ (\rho E)_t + \nabla \cdot (H \vec{u}) = \rho \vec{g} \cdot \vec{u}, \\ \rho = \alpha^+ \rho^+ + \alpha^- \rho^- \end{cases} \quad (9)$$

où \vec{u} , E , H désignent la vitesse commune des deux fluides, l'énergie totale spécifique, et l'enthalpie totale spécifique.

Lorsque $(\alpha^\pm)^2 - 1 = 0$, c'est à dire lorsque les deux fluides sont séparés par une surface, on retrouve les équations d'Euler ou de Navier-Stokes avec une surface libre.

À partir de ces équations, nous souhaitons dériver un modèle dispersif faiblement non-linéaire pour les ondes interfaciales, lorsque cette interface est diffuse. Un tel modèle admettrait vraisemblablement des ondes solitaires dont la stabilité serait à déterminer.

4.3 Étude numérique des solutions des équations de l'optique non-linéaire

Les équations de Feit-Fleck [34] rendent compte de la propagation d'une lumière monochromatique intense dans un milieu homogène. Elles sont obtenues à partir de la modulation des équations de Maxwell couplées avec une équation décrivant le plasma engendré par le laser. En appelant \mathbf{E} l'enveloppe du champ électrique et ρ la densité d'électrons, ces dernières s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \frac{i}{2k} \Delta_\perp \mathbf{E} - \frac{ik''}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + ik_0 n_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E} - \frac{\sigma}{2} (1 + i\omega\tau) \rho \mathbf{E} - \frac{\beta^{(K)}}{2} |\mathbf{E}|^{2(K-1)} \mathbf{E} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma}{n_b^2 E_g} \rho |\mathbf{E}|^2 + \frac{\beta^{(K)}}{K \hbar \omega} |\mathbf{E}|^{2K} \end{cases} \quad (10)$$

Les solutions de ces équations ont notamment été étudiées numériquement par Feng et al. [35] ou Bergé et al. [16], qui ont mis en évidence un phénomène de filamentation. Nous souhaitons étudier l'existence et la stabilité de structures cohérentes tridimensionnelles comme les breathers (il faut alors que les termes dissipatifs soient négligeables), qui ont été observés [31] dans le cas unidimensionnel, et tenter de mieux comprendre l'analogie avec les phénomènes de vagues extrêmes remarquée dans [43].

À cette occasion, nous voudrions tenter d'adapter les méthodes spectrales basées sur la transformation de Fourier à ce problème. En effet, si ces méthodes permettent de calculer rapidement les dérivées, elles se prêtent mal au raffinement de la grille de calcul.

Références

- [1] J. C. ALEXANDER & C. K. R. T. JONES, *Existence and stability of asymptotically oscillatory triple pulses*, Z. Angew. Math. Phys. **44** (1993), no. 2, 189–200.
- [2] J. C. ALEXANDER & C. K. R. T. JONES, *Existence and stability of asymptotically oscillatory double pulses*, J. Reine Angew. Math. **446** (1994), 49–79.
- [3] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN & S. DESCOMBES, *Well-posedness of one-dimensional Korteweg models*, Electronic Journal of Differential Equations **2006** (2006), no. 59, 1–35.
- [4] S. BENZONI-GAVAGE, R. DANCHIN, S. DESCOMBES & D. JAMET, *Structure of Korteweg models and stability of diffuse interfaces*, Interfaces Free Boundaries **7** (2005), 371–414.
- [5] S. BENZONI-GAVAGE, D. SERRE & K. ZUMBRUN, *Alternate Evans functions and viscous shock waves*, SIAM J. Math. Anal. **32** (2001), no. 5, 929–962 (electronic).
- [6] S. BENZONI-GAVAGE, D. SERRE & K. ZUMBRUN, *Transition to instability of planar viscous shock fronts : The refined stability condition.*, Z. Anal. Anwend. **27** (2008), no. 4, 381–406.
- [7] A. BOSE & C. K. R. T. JONES, *Stability of the in-phase travelling wave solution in a pair of coupled nerve fibers*, Indiana University Mathematics Journal **44** (1995), no. 1, 189–220.
- [8] D. BRESCH & B. DESJARDINS, *Sur un modèle de Saint-Venant visqueux et sa limite quasi-géostrophique*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **335** (2002), no. 12, 1079–1084.
- [9] D. BRESCH, B. DESJARDINS, M. GISCLON & R. SART, *Instability results related to compressible Korteweg system*, Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. **54** (2008), no. 1, 11–36.
- [10] D. BRESCH, B. DESJARDINS & E. GRENIER, *Crossing of eigenvalues : measure type estimates*, J. Differential Equations **241** (2007), no. 2, 207–224.
- [11] D. BRESCH, B. DESJARDINS & E. GRENIER, *Measures on double or resonant eigenvalues for linear Schrödinger operator*, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 5, 1269–1281.
- [12] D. BRESCH & D. GÉRARD-VARET, *On some homogenization problems from shallow water theory*, Applied Mathematics Letters **20** (2007), 505–510.
- [13] T. J. BRIDGES, G. DERKS & G. GOTTWALD, *Stability and instability of solitary waves of the fifth-order KdV equation : a numerical framework*, Physica D **172** (2002), 190–216.
- [14] B. BUFFONI, A. R. CHAMPNEYS & J. F. TOLAND, *Bifurcation and coalescence of a plethora of homoclinic orbits for a Hamiltonian system*, J. Dyn. Differ. Equations **8** (1996), no. 2, 221–279.
- [15] A. V. BURYAK & A. R. CHAMPNEYS, *On the stability of solitary waves of the fifth-order KdV equation*, Physics Letters A **233** (1997), 58–62.
- [16] L. BERGÉ, S. SKUPIN, R. NUTER, J. KASPARIAN & J.-P. WOLF, *Ultrashort filaments of light in weakly ionized optically transparent media*, Reports on Progress in Physics **70** (2007), 127–137.
- [17] R. CAMASSA & T. Y.-T. WU, *Stability of forced steady solitary waves*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **337** (1991), no. 1648, 429–466.
- [18] F. CHARDARD, *Maslov index for solitary waves obtained as a limit of the Maslov index for periodic waves*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **345/12** (2007), 689–694.
- [19] F. CHARDARD, F. DIAS & T. J. BRIDGES, *Fast computation of the Maslov Index for hyperbolic linear systems with periodic coefficients*, Journal of Physics A : Mathematical and General **39** (2006), no. 47, 14545–14557.

- [20] F. CHARDARD, F. DIAS & T. J. BRIDGES, *Computing the Maslov index of solitary waves. part 1 : Hamiltonian systems on a 4-dimensional phase space*, Physica D **238** (2009), no. 18, 1841–1867.
- [21] C.-N. CHEN & X. HU, *Maslov index for homoclinic orbits of Hamiltonian systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **24** (2007), no. 4, 589–603.
- [22] M. CHUGUNOVA & D. PELINOVSKY, *Count of eigenvalues in the generalized eigenvalue problem*, <http://arxiv.org/abs/math.DS/0602386>, accepted in Journal of Mathematical Physics (2009).
- [23] M. CHUGUNOVA & D. PELINOVSKY, *Two-pulse solutions in the fifth-order KdV equation : rigorous theory and numerical approximations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **8** (2007), no. 4, 773–800.
- [24] W. CRAIG, P. GUYENNE, D. P. NICHOLLS & C. SULEM, *Hamiltonian long-wave expansions for water waves over a rough bottom*, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A **461** (2006), 839–873.
- [25] P. DARIPA, *Higher-order Boussinesq equations for two-way propagation of shallow water waves.*, Eur. J. Mech., B, Fluids **25** (2006), no. 6, 1008–1021.
- [26] J. DENG, *Instability of waves and patterns in Hamiltonian systems and the Maslov index*, Ph.D. thesis, Brown University Providence, RI 02912, 2002.
- [27] J. DENG & S. NII, *Infinite-dimensional Evans function theory for elliptic eigenvalue problems in a channel*, J. Differ. Equations **225** (2006), no. 1, 57–89.
- [28] J. DENG & S. NII, *An infinite-dimensional Evans function theory for elliptic boundary value problems*, J. Differ. Equations **244** (2008), no. 4, 753–765.
- [29] F. DIAS & G. IOOSS, *Capillary-gravity interfacial waves in infinite depth.*, Eur. J. Mech., B **15** (1996), no. 3, 367–393.
- [30] F. DIAS & J.-M. VANDEN-BROECK, *Trapped waves between submerged obstacles*, J. Fluid Mech. **509** (2004), 93–102.
- [31] J.M. DUDLEY, G. GENTIL, F. DIAS, B. KIBLER, N. AKHMEDIEV, *Modulation instability, Akhmediev breathers and continuous wave supercontinuum generation*, Optics Express **17**, no. 24, 21497–21508.
- [32] F. DIAS, D. DUTYKH & J.-M. GHIDAGLIA, *A two-fluid model for violent aerated flows*, Computers and Fluids **39** (2010), no. 2, 283–293.
- [33] D. DUTYKH & F. DIAS, *Dissipative Boussinesq equations.*, C. R., Méc., Acad. Sci. Paris **335** (2007), no. 9-10, 559–583.
- [34] M.D. FEIT & J.A. FLECK, JR., *Effects of refraction on spot-size dependence laser-induced breakdown*, Applied Physics Letters **24** (1974), 169-172.
- [35] Q. FENG, J.V. MOLONEY, A.C. NEWELL, E.M. WRIGHT, K. COOK, P.K. KENNEDY, D.X. HAMMER, B.A. ROCKWELL, AND C.R. THOMSON, *Theory and simulation on the threshold of water breakdown induced by focused ultrashort laser pulses*, IEEE Journal of Quantum Electronics **33** (1997), no. 2, 127-137.
- [36] R. A. GARDNER, *Spectral analysis of long wavelength periodic waves and applications*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **491** (1997), 149–181.
- [37] M. HARAGUŞ, E. LOMBARDI & A. SCHEEL, *Spectral stability of wave trains in the Kawahara equation*, J. Math. Fluid Mech. **8** (2006), no. 4, 482–509.
- [38] T. KAPITULA, N. KUTZ & B. SANDSTEDTE, *The Evans function for nonlocal equations*, Indiana Univ. Math. J. **53** (2004), no. 4, 1095–1126.

- [39] T. KAWAHARA, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, Journal of the physical society of Japan **33** (1972), 260–264.
- [40] T. KAWAHARA, N. SUGIMOTO & T. KAKUTANI, *Nonlinear interaction between short and long capillarity-gravity waves*, J. Phys. Soc. Japan **39** (1975), 1379–1386.
- [41] V. F. LAZUTKIN, *Splitting of separatrices for the Chirikov standard map*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **300** (2003), no. Teor. Predst. Din. Sist. Spets. Vyp. 8, 25–55, 285.
- [42] L. MOLINET & F. RIBAUD, *The Cauchy problem for dissipative Korteweg de Vries equations in Sobolev spaces of negative order*, Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 4, 1745–1776.
- [43] D.R. SOLLI, C. ROPERS, P. KOONATH & B. JALALI, *Optical rogue waves*, Nature, **450** (2007), 1054-1057.
- [44] J. C. SAUT & N. TZVETKOV, *The Cauchy problem for the fifth order KP equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), no. 4, 307–338.