

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Chapitre 1: FORMES BILINEAIRES ET FORMES QUADRATIQUES.

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Algèbre bilinéaire
Année 2024-2025

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

- ▶ Dans ce chapitre, on ne considèrera que des corps commutatifs \mathbb{K} de caractéristique différente de deux, comme \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Q} , $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier, différent de deux.
- ▶ Soit E et F des \mathbb{K} -espaces vectoriels. On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F .
- ▶ Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, on notera E^* son espace vectoriel dual, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur E , autrement dit $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire
espace des formes bilinéaires
écriture matricielle des formes bilinéaires
formule de changement de bases
rang d'une forme bilinéaire
forme bilinéaire non dégénérée

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
 - définition d'une application bilinéaire
 - espace des formes bilinéaires
 - écriture matricielle des formes bilinéaires
 - formule de changement de bases
 - rang d'une forme bilinéaire
 - forme bilinéaire non dégénérée
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Définition

Soit E , F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application. On dit que l'application φ est une **application bilinéaire** lorsque, pour tous $u, u' \in E$, $v, v' \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\varphi(u + \lambda u', v) = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u', v)$$

et

$$\varphi(u, v + \lambda v') = \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, v').$$

Proposition

L'application $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ est une application bilinéaire si, et seulement si,

$$\forall v \in F, \varphi(\cdot, v) \in \mathcal{L}(E, G) \text{ et } \forall u \in E, \varphi(u, \cdot) \in \mathcal{L}(F, G)$$

où, pour tout $v \in F$,

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot, v) : E &\longrightarrow G \\ u &\longmapsto \varphi(u, v) \end{aligned}$$

et pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(u, \cdot) : F &\longrightarrow G \\ v &\longmapsto \varphi(u, v). \end{aligned}$$

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Définition

Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire.

- ▶ On dit alors que φ est une **forme bilinéaire sur $E \times F$** .
- ▶ Lorsque de plus $F = E$ on dit que φ est une **forme bilinéaire sur E** .

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire
espace des formes bilinéaires
écriture matricielle des formes bilinéaires
formule de changement de bases
rang d'une forme bilinéaire
forme bilinéaire non dégénérée

Espace des formes bilinéaires

Proposition

Soit E et F des espaces vectoriels et soit φ une *forme bilinéaire sur*

$E \times F$. Alors les applications $g_\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F^* \\ u & \longmapsto & \varphi(u, \cdot) \end{array}$ et

$d_\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E^* \\ v & \longmapsto & \varphi(\cdot, v) \end{array}$ sont linéaires.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Proposition

- ▶ L'ensemble des *formes bilinéaires sur $E \times F$* est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}_2(E, F)$, isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F^*)$ des applications linéaires de E dans F^* et isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(F, E^*)$ des applications linéaires de F dans E^* .
- ▶ L'ensemble des *formes bilinéaires sur E* est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}_2(E)$, isomorphe à l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, E^*)$ des applications linéaires de E dans E^* .

Remarque et Définition

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et F de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▶ Comme $\dim \mathcal{L}(E, F^*) = pn$, on a donc $\dim \mathcal{L}_2(E, F) = pn$ et $\dim \mathcal{L}_2(E) = p^2$.
- ▶ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F . Soit φ une **forme bilinéaire sur $E \times F$** . Soit $M = (\varphi(e_i, e'_j))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. On dit que cette matrice est **la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$** . On note $M = \text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Formule matricielle d'une forme bilinéaire.

On reprend les mêmes hypothèses que précédemment. Soit

$u = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in E$ et $v = \sum_{j=1}^n y_j e'_j \in F$ ($x_i, y_j \in \mathbb{K}$ pour tous $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$). Soit φ une **forme bilinéaire sur $E \times F$** .

Notons $M = (\varphi(e_i, e'_j))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} = \text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Soit $X = {}^t(x_1 \dots x_p)$, resp. $Y = {}^t(y_1 \dots y_n)$, la matrice-colonne représentant les coordonnées du vecteur u dans la base \mathcal{B} , respectivement du vecteur v dans la base \mathcal{B}' .

Alors on a

$$\varphi(u, v) = {}^t X M Y = {}^t Y {}^t M X.$$

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Proposition

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et F respectivement étant choisies, l'application de $\mathcal{L}_2(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p, n)$ définie par $\varphi \mapsto \text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Formule de changement de bases

On reprend les hypothèses précédentes. Soit φ une **forme bilinéaire** sur $E \times F$. Soit \mathcal{B}_1 une autre base de E et \mathcal{B}'_1 une autre base de F . On note P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}_1 et Q la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B}'_1 . On a alors

$$\text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = {}^t P \text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}') Q.$$

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire
espace des formes bilinéaires
écriture matricielle des formes bilinéaires
formule de changement de bases
rang d'une forme bilinéaire
forme bilinéaire non dégénérée

Proposition-Définition

Supposons E et F de dimension finie et soit φ une **forme bilinéaire sur $E \times F$** . Alors les deux applications linéaires g_φ et d_φ définies précédemment ont le même rang, appelé **le rang de φ** .
De plus le rang de φ est égal au rang de la matrice de φ dans n'importe quelles bases de E et F .

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une application bilinéaire

espace des formes bilinéaires

écriture matricielle des formes bilinéaires

formule de changement de bases

rang d'une forme bilinéaire

forme bilinéaire non dégénérée

Définition

Une forme bilinéaire φ sur $E \times F$ est dite **non dégénérée** lorsque les applications linéaires d_φ et g_φ sont injectives. Une forme bilinéaire sur $E \times F$ qui n'est pas non dégénérée est dite **dégénérée**.

Proposition

On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E, F)$ et M la matrice de φ dans des bases quelconques de E et de F . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- ▶ φ est non dégénérée.
- ▶ g_φ est bijective.
- ▶ d_φ est bijective.
- ▶ pour tout $u \in E$, $[\varphi(u, v) = 0, \forall v \in F \Rightarrow u = 0]$ et $\dim E = \dim F$.
- ▶ pour tout $v \in F$, $[\varphi(u, v) = 0, \forall u \in E \Rightarrow v = 0]$ et $\dim E = \dim F$.
- ▶ $\text{rang}(\varphi) = \dim E = \dim F$.
- ▶ $\dim E = \dim F$ et $\det(M) \neq 0$.

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.**
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Définition

Soit E et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\varphi : E \times E \longrightarrow G$ une application.

- ▶ On dit que φ est **symétrique** lorsque:
pour tous $u, v \in E$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
- ▶ On dit que φ est **antisymétrique** lorsque: pour tous $u, v \in E$,
 $\varphi(u, v) = -\varphi(v, u)$.
- ▶ On dit que φ est **alternée** lorsque : pour tout $u \in E$,
 $\varphi(u, u) = 0$.

Proposition

*Si de plus φ est bilinéaire alors φ antisymétrique $\iff \varphi$ alternée
(car la caractéristique de \mathbb{K} est différente de deux).*

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Cas des formes bilinéaires

Proposition

L'ensemble des *formes bilinéaires sur E symétriques, resp. antisymétriques*, est un espace vectoriel, noté $\mathcal{S}_2(E)$, resp. $\mathcal{A}_2(E)$.
On a $\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Proposition

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et soit \mathcal{B} une base de E . Soit φ une **forme bilinéaire sur E** . On note M la matrice de φ dans la base \mathcal{B} : $M = \text{Mat}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

- ▶ φ est symétrique, resp. antisymétrique.
- ▶ la matrice M est symétrique (c'est-à-dire $M = {}^t M$), resp. la matrice M est antisymétrique (c'est-à-dire $M = -{}^t M$).

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition
propriétés de l'orthogonalité
isotropie
famille orthogonale, orthonormale

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 **Orthogonalité.**
 - définition
 - propriétés de l'orthogonalité
 - isotropie
 - famille orthogonale, orthonormale
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition

propriétés de l'orthogonalité

isotropie

famille orthogonale, orthonormale

Définition

Soit E et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\varphi : E \times E \rightarrow G$ une application bilinéaire **symétrique** ou **antisymétrique**. Soit $u, v \in E$. On dit que u et v sont **φ -orthogonaux** (ou **orthogonaux** s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la forme φ) et on note $u \perp_{\varphi} v$ (ou $u \perp v$) lorsque $\varphi(u, v) = 0$.

Proposition

Avec les hypothèses ci-dessus, pour tous $u, v \in E$

$$u \perp_{\varphi} v \implies v \perp_{\varphi} u.$$

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition

propriétés de l'orthogonalité

isotropie

famille orthogonale, orthonormale

Proposition-Définition

On reprend les hypothèses ci-dessus et soit $A \subset E$. L'ensemble $A^\perp = \{v \in E \mid \forall u \in A, \varphi(u, v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **sous-espace orthogonal** de A .

Proposition

Soit φ une **forme bilinéaire symétrique** sur E (de dimension finie ou infinie). Soit $A \subset E$ et $B \subset E$.

- ▶ $\{0\}^\perp = E$.
- ▶ $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
- ▶ $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- ▶ $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.
- ▶ $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
- ▶ $(A \cap B)^\perp \supset A^\perp \cup B^\perp$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition

propriétés de l'orthogonalité

isotropie

famille orthogonale, orthonormale

Cas où $\dim E = n$.

Proposition

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ une **forme bilinéaire symétrique** sur E . Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ $\dim F + \dim F^\perp \geq n$.
- ▶ $\text{rang}(\varphi) = \dim E - \dim E^\perp$.

Proposition

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ et soit φ une *forme bilinéaire symétrique* sur E . Si de plus φ est *non dégénérée*, on a, pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E et toute partie A de E :

- ▶ $\dim F + \dim F^\perp = n$.
- ▶ $F = (F^\perp)^\perp$.
- ▶ $(A^\perp)^\perp = \text{Vect } A$.
- ▶ $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp = \text{Vect}(F^\perp \cup G^\perp)$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition

propriétés de l'orthogonalité

isotropie

famille orthogonale, orthonormale

Définition

Soit φ une **forme bilinéaire symétrique** sur le \mathbb{K} -espace vectoriel E .
Soit $u \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Le vecteur u est dit **isotrope** pour φ si $\varphi(u, u) = 0$.
- ▶ Le sous-espace vectoriel F est dit **isotrope** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
 - ▶ $\varphi|_{F \times F}$ est dégénérée.
 - ▶ $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Définition

Soit φ une **forme bilinéaire symétrique** sur le \mathbb{K} -espace vectoriel E et soit F un sous-espace vectoriel de E .

- ▶ Le sous-espace vectoriel F est **non isotrope** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
 - ▶ $\varphi|_{F \times F}$ est non dégénérée.
 - ▶ $F \cap F^\perp = \{0\}$.
 - ▶ lorsque de plus E est de dimension finie: $E = F \oplus F^\perp$.
- ▶ Le sous-espace vectoriel F est dit **totalelement isotrope** si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :
 - ▶ $\varphi|_{F \times F} = 0$.
 - ▶ $F \subset F^\perp$.

Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ une **forme bilinéaire symétrique** sur E . Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E et $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de E .

- ▶ On dit que E est **somme directe orthogonale** des E_i , $i \in I$, lorsque $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ et que, pour tous $i \neq j$, tout élément de E_i est φ -orthogonal à tout élément de E_j . On note alors

$$E = \bigoplus_{i \in I}^{\perp} E_i.$$

- ▶ On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **φ -orthogonale** lorsque pour tous $i \neq j$, $\varphi(u_i, u_j) = 0$.
- ▶ On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est **φ -orthonormale** lorsque pour tous $i, j \in I$, $\varphi(u_i, u_j) = \delta_{ij}$.

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition
propriétés de l'orthogonalité
isotropie
famille orthogonale, orthonormale

Proposition

On reprend les hypothèses précédentes. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de E , φ -orthogonale dont aucun des vecteurs n'est isotrope. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

Corollaire

Toujours avec les hypothèses précédentes, toute famille finie φ -orthonormale de E est libre.

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition
propriétés de l'orthogonalité
isotropie
famille orthogonale, orthonormale

Théorème

Soit φ une *forme bilinéaire symétrique* sur le \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Alors il existe au moins une base de E qui est φ -orthogonale (mais pas forcément φ -orthonormale, même si φ est non dégénérée, ce qui peut être le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par exemple).

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 **Produit scalaire.**
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Définition

Dans cette section, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

On dit que φ est un **produit scalaire sur E** lorsque φ est :

- ▶ symétrique,
- ▶ non dégénérée,
- ▶ et pour tout $u \in E$, $\varphi(u, u) \geq 0$: on dit dans ce cas que φ est **positive**.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Proposition

Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E . Alors pour tout $(u, v) \in E \times E$, on a **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$(\varphi(u, v))^2 \leq \varphi(u, u)\varphi(v, v)$$

avec égalité si u et v sont colinéaires, et seulement dans ce cas si φ est **définie positive**, c'est-à-dire si : $\forall u \in E \setminus \{0\}, \varphi(u, u) > 0$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Proposition

Une forme bilinéaire symétrique φ sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E est un produit scalaire sur E si, et seulement si, φ est définie positive.

Proposition

*Soit φ un **produit scalaire** sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E . Alors tout sous-espace vectoriel F de E est non isotrope et lorsque de plus, E est de dimension finie, on a*

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une forme quadratique
polynômes homogènes de degré deux.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 **Formes quadratiques.**
 - définition d'une forme quadratique
 - polynômes homogènes de degré deux.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Proposition-Définition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} un corps de caractéristique différente de deux) et $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que q est une **forme quadratique** sur E lorsqu'il existe une forme bilinéaire φ sur E telle que $q(u) = \varphi(u, u)$ pour tout $u \in E$. On dit alors que q est **la forme quadratique sur E associée** à φ .

Alors q vérifie les propriétés suivantes:

pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- ▶ $q(u + v) = q(u) + q(v) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u)$.
- ▶ $q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$.

Proposition-Définition

On note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E .

- ▶ $\mathcal{Q}(E)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- ▶ Soit $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application. Alors $q \in \mathcal{Q}(E)$ si, et seulement si:
 - ① $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, q(\lambda u) = \lambda^2 q(u)$
 - ② et l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{2} \left(q(u+v) - q(u) - q(v) \right)$$
 pour tous $u, v \in E$ est une forme bilinéaire sur E (et alors φ est symétrique et q est la forme quadratique sur E associée à φ).

On dit que φ est **la forme polaire** de q .

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

définition d'une forme quadratique

polynômes homogènes de degré deux.

Corollaire

- ▶ L'application $\mathcal{S}_2(E) \rightarrow \mathcal{Q}(E)$ qui à tout $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$ associe $q \in \mathcal{Q}(E)$ telle que $q(u) = \varphi(u, u)$ pour tout $u \in E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- ▶ Lorsque $\dim E = n$, on a $\dim \mathcal{S}_2(E) = \dim \mathcal{Q}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque

Grâce à l'isomorphisme précédent, toutes les notions attachées à une forme bilinéaire symétrique seront valables pour sa forme quadratique associée et vice-versa (non dégénérescence, rang, positivité etc...).

Proposition

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ et φ sa forme polaire. Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ nul ou homogène de degré deux tel que, pour tout $u \in E$, si $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on ait $q(u) = P(x_1, \dots, x_n)$.*

- *Le polynôme P est donné par la formule :*

$$P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} X_i X_j$$

où, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $\alpha_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$.

Proposition

Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme nul ou homogène de degré deux, alors il existe une unique forme quadratique q sur E telle que, pour tout $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on ait $q(u) = P(x_1, \dots, x_n)$.

Si $P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} X_i X_j$ avec $\beta_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tous i, j , alors pour tout $(u, v) \in E^2$ avec $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on a

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

où φ est la forme polaire de q .

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
 - classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
 - classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition

Ici \mathbb{K} est toujours un corps de caractéristique différente de deux et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit q_1 et q_2 des formes quadratiques sur E . On dit que **q_1 et q_2 sont équivalentes** lorsqu'il existe un automorphisme f de l'espace vectoriel E tel que, pour tout $u \in E$, $q_1(u) = q_2(f(u))$, ce qui revient à dire, lorsque E est de dimension finie, qu'il existe des bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 de E telles que $Mat(\varphi_1, \mathcal{B}_1) = Mat(\varphi_2, \mathcal{B}_2)$, où φ_1 , resp. φ_2 , est la forme polaire de q_1 , resp. de q_2 .

Proposition

La relation "être équivalentes" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{Q}(E)$.

Théorème

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\dim_{\mathbb{C}} E = n$. Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ (de forme polaire φ) telle que $\text{rang}(q) = r \leq n$. Alors

- ① il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que, pour tout $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on ait $q(u) = \sum_{i=1}^r x_i^2$.
- ② il existe une base de E φ -orthonormale si, et seulement si, $r = n$.

Corollaire

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, toute forme quadratique de rang r sur le \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie est équivalente à la forme quadratique $\sum_{i=1}^r x_i^2$.

Théorème (loi d'inertie de Sylvester)

Ici E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

- ▶ Toute forme quadratique q de rang r sur E est équivalente à la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^r x_i^2$$

où p est un entier qui ne dépend que de q . Le couple d'entiers $(p, r - p)$ s'appelle la **signature** ou **le type** de la forme quadratique q .

- ▶ En conséquence deux formes quadratiques sur E sont équivalentes si, et seulement si, elles ont la même signature.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $q \in \mathcal{Q}(E)$.

- ▶ On dit que q est **positive**, resp. **négative**, lorsque, pour tout $u \in E$, $q(u) \geq 0$, resp. $q(u) \leq 0$.
- ▶ On dit que q est **définie positive**, resp. **définie négative** lorsque, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $q(u) > 0$, resp. $q(u) < 0$.

Notation.

Applications et formes bilinéaires.

Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.

Orthogonalité.

Produit scalaire.

Formes quadratiques.

Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

classification lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et soit $q \in \mathcal{Q}(E)$.

- ▶ La forme quadratique q est définie positive si, et seulement si, elle est de type $(n, 0)$.
- ▶ La forme quadratique q est définie négative si, et seulement si, elle est de type $(0, n)$.
- ▶ La forme quadratique q de rang r est positive si, et seulement si, elle est de type $(r, 0)$.
- ▶ La forme quadratique q de rang r est négative si, et seulement si, elle est de type $(0, r)$.

Notation.
Applications et formes bilinéaires.
Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
Orthogonalité.
Produit scalaire.
Formes quadratiques.
Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Plan

- 1 Notation.
- 2 Applications et formes bilinéaires.
- 3 Applications bilinéaires symétriques, antisymétriques.
- 4 Orthogonalité.
- 5 Produit scalaire.
- 6 Formes quadratiques.
- 7 Classification des formes quadratiques lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- 8 Procédé pratique de réduction en carrés, méthode de Gauss.

Théorème

Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- ▶ Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ de rang r . Alors il existe r scalaires $\lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et r formes linéaires $\theta_i \in E^*$ **linéairement indépendantes**, tels que $q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \theta_i^2$.
- ▶ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, q a pour signature $(p, r - p)$ si, et seulement si, p est le nombre de coefficients $\lambda_i > 0$ et $r - p$ le nombre de coefficients $\lambda_i < 0$.

Méthode de Gauss

Voir TD.