Chapitre 1: ESPACES AFFINES ET SOUS-ESPACES AFFINES

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Géométrie 1
Année 2024-2025

Plan

Plan

Introduction.

La notion d'espace affine est fortement liée à celle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Etant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, la notion d'espace affine associé à l'espace vectoriel E consiste à "représenter" les vecteurs de E par des couples de points (appelés aussi bipoints) de l'espace affine. Autrement dit si $\vec{u}$ est un vecteur, on va lui associer un bipoint (m, n) et on écrira: $\vec{u} = \overrightarrow{mn}$. Plusieurs bipoints vont correspondre au même vecteur $\vec{u}$. Soient m, n, p, q des points et $\vec{u}$ un vecteur, on aura:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{mn} = \overrightarrow{pq} &\iff mnqp \text{ est un parallélogramme} \\ &\iff (m, q) \text{ et } (n, p) \text{ ont même milieu} \end{aligned}$$

Si on fixe un point a de l'espace affine, à tout vecteur $\vec{u}$ va correspondre un unique point m tel que $\vec{u} = \overrightarrow{am}$.

Plan

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathscr{E}$ un ensemble non vide. On dit que l'ensemble $\mathscr{E}$ est un espace affine de direction E ou d'espace vectoriel associé E lorsqu'il existe une application

$$\begin{array}{rrcl} \theta : & \mathscr{E} \times \mathscr{E} & \longrightarrow & E \\ & (m,\, n) & \mapsto & \theta(m,\, n) \end{array}$$

vérifiant les conditions suivantes:

(i) $\forall a,\, b,\, c \in \mathscr{E}$, $\theta(a,\, b) + \theta(b,\, c) = \theta(a,\, c)$, dite relation de Chasles.

(ii) $\forall a \in \mathscr{E}$, l'application $\theta_a : m \mapsto \theta(a,\, m)$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur E.

Les éléments de $\mathscr{E}$ sont appelés points et ceux de E sont appelés vecteurs.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Avec les notations précédentes, on a :

- pour tout couple $(m, n) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, $\theta(m, n)$ est encore noté $\overrightarrow{mn}$.
- la relation de Chasles s'écrit donc : pour tous $a, b, c \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.
- pour tout $m \in \mathscr{E}$, pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $n \in \mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{mn} = \vec{u}$ et on note aussi $n = \vec{u} + m$.

Conséquences.

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E.

- Pour tout $m \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{mm} = \vec{0}$.
- Pour tous a, $b \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} = \vec{0}$ ou encore $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$.

Exemples

- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un espace affine particulier, en posant, pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E$, $\theta(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$.
- Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_r$ des espaces affines de direction respective $E_1, \ldots, E_r$. Alors le produit cartésien $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 \times \ldots \times \mathscr{E}_r$ est un espace affine de direction $E_1 \times \ldots \times E_r$ en posant pour tout $((m_1, \ldots, m_r), (n_1, \ldots, n_r)) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, $\theta((m_1, \ldots, m_r), (n_1, \ldots, n_r)) = (\overrightarrow{m_1 n_1}, \ldots, \overrightarrow{m_r n_r})$
- Par conséquent $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ sont des espaces affines. Pour tout $((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a $\theta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$.

Plan

Dimension et sous-espace affine.

Définitions

- La dimension d'un espace affine $\mathscr{E}$ de direction E est la dimension de l'espace vectoriel E.
- Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{F} \neq \emptyset$. On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ lorsqu'il existe $a \in \mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tels que $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{am} \in F\}$. (Alors $a \in \mathscr{F}$ et on dit que $\mathscr{F}$ passe par le point a et a pour direction F).

Dimension d'un sous-espace affine.

Proposition

- *Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction le sous-espace vectoriel F de E. Alors $\mathscr{F}$ est un espace affine de direction F et la dimension de l'espace vectoriel F s'appelle la dimension de $\mathscr{F}$. Par conséquent $\mathscr{F}$ est de dimension finie (égale à p) si, et seulement si, sa direction F est de dimension finie (égale à p) et on note $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F) = p$.*
- *Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F. Alors pour tout point $a \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{F} = \{m \in \mathscr{E} \mid \overrightarrow{am} \in F\}$.*

Proposition

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et soit F un sous-espace vectoriel de E et $a \in \mathscr{E}$. Alors il existe un unique sous-espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ passant par a et de direction F.

Exemple

Un (sous)-espace affine de dimension zéro est un singleton.

Exemples de (sous)-espaces affines.

Définitions

- Un (sous)-espace affine $\mathscr{F}$ est appelé une droite affine si $\dim(\mathscr{F}) = 1$.
- Un (sous)-espace affine $\mathscr{F}$ est appelé un plan affine si $\dim(\mathscr{F}) = 2$.
- Un sous-espace affine $\mathscr{F}$ de l'espace affine $\mathscr{E}$ est appelé un hyperplan affine de $\mathscr{E}$ si $\mathrm{codim}(\mathscr{F}) = 1$.

Plan

Intersection de sous-espaces affines.

Proposition

Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ *une famille (finie ou non) de sous-espaces affines de l'espace affine* $\mathscr{E}$ *et soit, pour tout* $i \in I$, F_i *la direction de* $\mathscr{F}_i$. *Si l'intersection* $\mathscr{F} = \cap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ *est non vide, alors* $\mathscr{F}$ *est un sous-espace affine de* $\mathscr{E}$ *de direction l'espace vectoriel* $\cap_{i\in I}F_i$.

Cas de deux sous-espaces affines.

Proposition

Soit $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines de direction respective F_1 et F_2. Alors $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2 \neq \emptyset$ si, et seulement si, il existe $a_1 \in \mathscr{F}_1$ et $a_2 \in \mathscr{F}_2$ tels que $\overrightarrow{a_1 a_2} \in F_1 + F_2$.

Proposition

Soit $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ deux sous-espaces affines de direction respective F_1 et F_2 telles que $F_1 \oplus F_2 = E$. Alors $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ ont un point commun unique.

Sous-espace affine engendré.

Définition

Soit $(a_i)_{i\in I}$ ($I \neq \emptyset$) une famille de points de l'espace affine $\mathscr{E}$. Le sous-espace affine engendré par les a_i est l'intersection de tous les sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ contenant tous les a_i. On le note $Aff((a_i)_{i\in I})$. C'est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant tous les a_i, $i \in I$.

Remarque

$Aff((a_i)_{i\in I})$ est bien un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. De plus, pour tous $i, j \in I$, on a $F_i = F_j$ où $F_i = Vect((\overrightarrow{a_i a_k})_{k\in I})$. La direction de $Aff((a_i)_{i\in I})$ est F_{i_0} pour un certain $i_0 \in I$.

Exemples

- Soit $a \in \mathscr{E}$. Alors $Aff(a) = \{a\}$.
- Soit $a,\ b \in \mathscr{E}$ avec $a \neq b$. Alors $Aff(a,\ b)$ est la droite affine passant par a et de direction la droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{ab}$. On la note (ab).
- Soit $a,\ b,\ c \in \mathscr{E}$ trois points non alignés (c'est-à-dire $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$ sont non colinéaires). Alors $Aff(a,\ b,\ c)$ est le plan affine passant par a et de direction le plan vectoriel dont une base est $(\overrightarrow{ab},\ \overrightarrow{ac})$. On le note $(a\,b\,c)$.

Plan

Sous-espaces affines parallèles

Définition

Soit $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines (de direction respective F et G) de l'espace affine $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles lorsque $F = G$. On dit que $\mathscr{F}$ est faiblement parallèle (on dit parfois : parallèle) à $\mathscr{G}$ lorsque $F \subset G$.
Dans les deux cas, on note $\mathscr{F} // \mathscr{G}$.

Proposition

La relation de parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. La relation de faible parallélisme est seulement réflexive et transitive.

Position relative

Proposition

- *Si* $\mathscr{F}$ *est parallèle à* $\mathscr{G}$, *alors* $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ *ou* $\mathscr{F} = \mathscr{G}$.
- *Si* $\mathscr{F}$ *est faiblement parallèle à* $\mathscr{G}$, *alors* $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \emptyset$ *ou* $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.

Remarque

Deux sous-espaces affines d'intersection vide ne sont pas nécessairement parallèles.

Proposition

Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ des droites du plan affine $\mathscr{P}$. Alors

- *$\mathscr{D} // \mathscr{D}'$ si, et seulement si, $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \emptyset$ (on dit dans ce cas que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont strictement parallèles) ou $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$.*
- *$\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{D}'$ si, et seulement si, il existe $\omega \in \mathscr{E}$ tel que $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{\omega\}$. On dit dans ce cas que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes en ω.*

Proposition

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension trois et soit $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ des droites de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}'$ des plans de $\mathscr{E}$. Alors

- *$\mathscr{P} // \mathscr{P}'$ si, et seulement si, $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$ (on dit dans ce cas que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles) ou $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$.*
- *$\mathscr{P}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{P}'$ si, et seulement si, il existe δ une droite de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \delta$. On dit dans ce cas que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants suivant la droite δ.*
- *$\mathscr{D} // \mathscr{P}$ si, et seulement si, $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \emptyset$ ou $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$.*
- *$\mathscr{D}$ n'est pas (faiblement) parallèle à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe $\omega \in \mathscr{E}$ tel que $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{\omega\}$.*
- *Si $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \emptyset$ on n'a pas forcément que $\mathscr{D} // \mathscr{D}'$.*