

Chapitre 1: ETUDE DE FONCTIONS

Florence Fauquant-Millet

L1 MIPC – Majeure Informatique – Université Jean Monnet
Outils Mathématiques
Année 2024-2025

Plan

- 1 Généralités sur les fonctions.
- 2 Limites d'une fonction et asymptotes
- 3 Dérivée d'une fonction
- 4 Fonctions convexes

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

exemples
définition d'une fonction
ensemble de définition d'une fonction
représentation graphique d'une fonction
parité et périodicité
rappels sur les fonctions trigonométriques
sens de variation d'une fonction
extremum d'une fonction

Plan

1 Généralités sur les fonctions.

- exemples
- définition d'une fonction
- ensemble de définition d'une fonction
- représentation graphique d'une fonction
- parité et périodicité
- rappels sur les fonctions trigonométriques
- sens de variation d'une fonction
- extremum d'une fonction

2 Limites d'une fonction et asymptotes

3 Dérivée d'une fonction

4 Fonctions convexes

Exemples.

On parle souvent dans le langage courant de quantités qui sont fonctions d'une autre quantité.

Par exemple:

- ▶ Le prix de l'excursion sera fonction du nombre de participants.
- ▶ Le montant des impôts attribués à chaque citoyen est fonction de son salaire.
- ▶ La quantité de l'oxygène dans l'air est fonction de l'altitude.

Ainsi une fonction est une relation mettant en jeu une situation de départ et une situation d'arrivée, telle qu'à n'importe quel élément de la situation initiale est associé au plus un résultat dans la situation finale.

Définition

Une fonction est une relation, souvent exprimée à l'aide d'une formule, entre un **ensemble de départ** et un **ensemble d'arrivée**, telle qu'à chaque élément de l'ensemble de départ corresponde **au plus** un élément dans l'ensemble d'arrivée.

Une fonction est souvent notée f ou g etc... et si E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de f , on note:

$$f : E \longrightarrow F$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

ou parfois $f : x \mapsto f(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté pour les ensembles de départ et d'arrivée de f .

- ▶ A tout élément x dans E correspond par la fonction f au plus un élément y de F , noté aussi $f(x)$, et appelé **l'image** de x par f .
- ▶ L'élément x est appelé **un antécédent** de y par f .
- ▶ Tout élément de E a au plus une image par f dans F .
- ▶ Une fonction dont l'ensemble d'arrivée est \mathbb{R} ou une partie de \mathbb{R} est appelée **fonction numérique**.

Exemple

Soit f la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = -4x + 4$$

On peut calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$ etc...

Cette fonction est une fonction **affine**.

Elle se représente graphiquement par une droite.

Définition (Ensemble (ou domaine) de définition d'une fonction.)

Déterminer l'**ensemble (ou domaine) de définition** d'une fonction f , c'est déterminer tous les éléments de l'ensemble de départ qui ont une image par f dans l'ensemble d'arrivée.

Si l'ensemble de définition de f est D , on dit aussi que f est **définie** sur D .

Exemples

▶ $f : x \mapsto f(x) = -4x + 4.$

L'ensemble de définition de f est \mathbb{R} .

▶ $g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}.$

L'ensemble de définition de g est \mathbb{R}^* (tous les nombres réels sauf zéro).

Représentation graphique d'une fonction.

On travaille dans un repère (Oxy) du plan et on considère une fonction numérique f définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

Définition

La **courbe représentative** ou **représentation graphique** de la fonction f est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont $(x, f(x))$ pour tout x dans D .

Représenter graphiquement f , c'est tracer sa courbe représentative dans un repère du plan.

Parité et périodicité.

On suppose de plus que le repère (Oxy) est orthogonal.

- ▶ Lorsque la courbe représentative de la fonction f (définie sur D) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) , on dit que la fonction f est **paire**.

Cela se traduit aussi par :

pour tout x de D , $-x$ est aussi dans D et $f(-x) = f(x)$.

- ▶ Lorsque la courbe représentative de la fonction f (définie sur D) est symétrique par rapport à l'origine O du repère (Oxy) , on dit que la fonction f est **impaire**.

Cela se traduit aussi par :

pour tout x de D , $-x$ est aussi dans D et $f(-x) = -f(x)$.

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

exemples
définition d'une fonction
ensemble de définition d'une fonction
représentation graphique d'une fonction
parité et périodicité
rappels sur les fonctions trigonométriques
sens de variation d'une fonction
extremum d'une fonction

Exemples

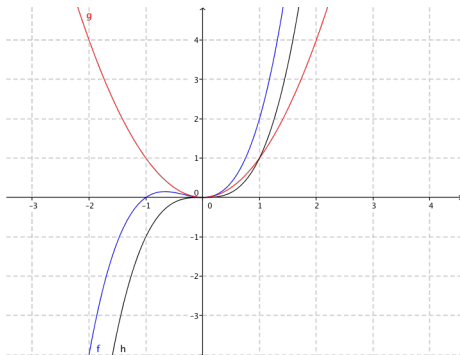


Figure: La fonction $g : x \mapsto x^2$ (représentée en rouge) est paire.
La fonction $h : x \mapsto x^3$ (représentée en noir) est impaire.
Par contre la fonction $f : x \mapsto x^3 + x^2$ (représentée en bleu) n'est ni paire, ni impaire.

Fonctions périodiques.

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **périodique** lorsqu'il existe un nombre réel T non nul tel que, pour tout x de D , $x + T \in D$ et $f(x + T) = f(x)$.

La **période** de f est le plus petit nombre réel strictement positif T tel que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

Lorsqu'une fonction est périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur égale à une période.

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

exemples
définition d'une fonction
ensemble de définition d'une fonction
représentation graphique d'une fonction
parité et périodicité
rappels sur les fonctions trigonométriques
sens de variation d'une fonction
extremum d'une fonction

Exemples.

Les fonctions circulaires (sinus ou cosinus) sont périodiques de période 2π .

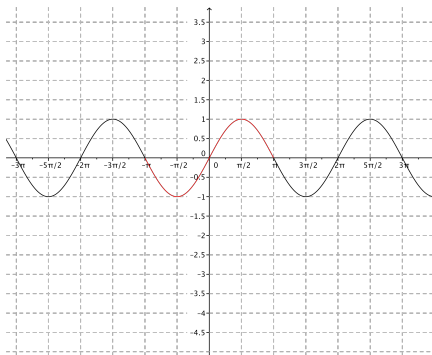


Figure: Courbe représentative de la fonction sinus.

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

exemples
définition d'une fonction
ensemble de définition d'une fonction
représentation graphique d'une fonction
parité et périodicité
rappels sur les fonctions trigonométriques
sens de variation d'une fonction
extremum d'une fonction

Rappels de trigonométrie

Voir par exemple

<https://www.maths-et-tiques.fr/telech/20TrigoT.pdf>

Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

Définition

La fonction f est dite **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur un intervalle $I \subset D$ lorsque :

pour tous $x, y \in I$ si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$).

La fonction f est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur un intervalle $I \subset D$ lorsque :

pour tous $x, y \in I$ si $x < y$ alors $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$).

Extremum d'une fonction.

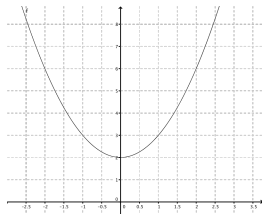
Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $D \subset \mathbb{R}$.

- ▶ On dit que f admet le nombre réel M comme **maximum absolu** lorsqu'il existe $a \in D$ tel que $M = f(a)$ et, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.
On dit dans ce cas que **le maximum (absolu) de f sur D est M qui est atteint en a** et que **f est majorée par M** .
- ▶ On dit que f admet le nombre réel m comme **minimum absolu** lorsqu'il existe $b \in D$ tel que $f(b) = m$ et que, pour tout $x \in D$, $f(x) \geq m$.
On dit dans ce cas que **le minimum (absolu) de f sur D est m qui est atteint en b** et que **f est minorée par m** .
- ▶ Un nombre réel M , resp. m , est appelé **maximum relatif (ou local)**, resp. **minimum relatif (ou local)** de f , lorsqu'il existe un intervalle ouvert $J \subset D$ tel qu'il existe $a \in J$, resp. $b \in J$ vérifiant $f(a) = M$, resp. $f(b) = m$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \leq M$, resp. $f(x) \geq m$. On dit aussi que M , resp. m , est atteint en a , resp. en b .

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La courbe de f est représentée ci-dessous.



On voit sur la courbe de f que la fonction f admet un minimum absolu en 0 qui vaut 2.

On peut retrouver le résultat précédent par le calcul:

on a $f(0) = 2$ et pour tout x dans \mathbb{R} , on a $x^2 \geq 0$. Donc $f(x) \geq 2$ et donc $2 = f(0)$ est le minimum de la fonction f sur \mathbb{R} et ce minimum est atteint en 0.

Remarque

- ▶ Un extremum (minimum ou maximum) peut être atteint en plusieurs points. Par exemple, la fonction sinus a un maximum égal à 1, atteint en une infinité de points qui sont tous les $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour k dans \mathbb{Z} , et un minimum égal à -1 , atteint en une infinité de points, tous les $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour k dans \mathbb{Z} .
- ▶ Soit f la fonction définie par: $x \mapsto x^4 - 3x^2 - 1$. Alors -1 est un maximum relatif (atteint en zéro) mais pas un maximum absolu.

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

définition d'une limite
fonctions exponentielle et logarithme népérien
limites de fonctions usuelles
opération sur les limites
asymptotes à la courbe d'une fonction

Plan

- 1 Généralités sur les fonctions.
- 2 **Limites d'une fonction et asymptotes**
 - définition d'une limite
 - fonctions exponentielle et logarithme népérien
 - limites de fonctions usuelles
 - opération sur les limites
 - asymptotes à la courbe d'une fonction
- 3 Dérivée d'une fonction
- 4 Fonctions convexes

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit définie sur un "voisinage" de a (sauf peut-être en a). On dit que la fonction f **tend vers un nombre réel ℓ quand x tend vers a** (ou que **la limite de f en a vaut ℓ**) et on note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, lorsque pour tout "voisinage" U de ℓ , on peut trouver un "voisinage" V de a tel que, pour tout x dans $D \cap V$, on a $f(x) \in U$. On peut étendre cette définition à a ou ℓ qui valent $\pm\infty$.

- ▶ "Voisinage" de a signifie :
 - ▶ pour $a \in \mathbb{R}$: intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant a , c'est-à-dire $]a - \alpha, a + \alpha[$ pour un certain $\alpha > 0$
 - ▶ pour $a = -\infty$: $] - \infty, -A[$ pour un certain $A > 0$
 - ▶ pour $a = +\infty$: $]A, +\infty[$ pour un certain $A > 0$.

Remarque

On peut également donner de façon similaire la définition de limite à droite ou à gauche en a , que l'on note respectivement $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

Rappels sur les fonctions exponentielle et logarithme népérien

Voir par exemple:

<https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Texplog.pdf>

Exemples de limites usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul quelconque.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ si } n \text{ est impair.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Croissances comparées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \end{array} \right.$$

Somme.

Dans les différents tableaux de limites, a désigne un nombre réel ou $\pm\infty$ et ℓ et ℓ' désignent des nombres réels.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	f minorée	ℓ	f majorée
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

F.I = forme indéterminée: on ne peut pas conclure directement!

Produit.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell' \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \ell \ell'$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (\text{signe } \ell)(+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (\text{signe } \ell)(-\infty)$$

$$f \text{ minorée par } m > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = +\infty$$

$$f \text{ minorée par } m > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = FI$$

Inverse.

Ici la fonction f ne s'annule pas sur un voisinage V de a , sauf peut-être en a .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } f \text{ strictement positive sur } V \setminus \{a\} \\ -\infty & \text{si } f \text{ strictement négative sur } V \setminus \{a\} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Comme $f/g = f \times 1/g$, les propriétés sur les limites du quotient f/g de deux fonctions découlent des propriétés sur les limites du produit et de l'inverse. Les formes indéterminées pour la limite du quotient f/g sont " ∞/∞ " ou " $0/0$ ".

Comparaison.

Théorème (d'encadrement ou des gendarmes.)

- ▶ Soit f , g et h des fonctions telles qu'il existe un voisinage V de a pour lequel, pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si les fonctions f et h admettent la même limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a , alors g admet ℓ comme limite en a .
- ▶ Soit f et g des fonctions telles qu'il existe un voisinage V de a pour lequel, pour tout $x \in V$, on ait $f(x) \leq g(x)$.
 - ▶ Si la limite de f en a existe et vaut $+\infty$ alors la limite de g en a existe et vaut $+\infty$.
 - ▶ Si la limite de g en a existe et vaut $-\infty$, alors la limite de f en a existe et vaut $-\infty$.

Le plan est muni d'un repère (Oxy) .

Définitions

- ▶ Soit $a \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f lorsque
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$
- ▶ Soit $b \in \mathbb{R}$. La droite d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f lorsque
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b.$$
- ▶ Soit a et b des nombres réels (avec $a \neq 0$). La droite d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en $\pm\infty$ lorsque
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Remarques

- ▶ La position relative de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote (au voisinage de $\pm\infty$) est donnée par le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour x dans un voisinage de $\pm\infty$.
- ▶ Soit $a \neq 0$. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $\pm\infty$ si, et seulement si,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x + 1}$ pour $x \neq -1$.

Alors la courbe représentative \mathcal{C}_f de f admet la droite \mathcal{D} d'équation $y = 3x - 3$ comme asymptote oblique (en $+\infty$ et en $-\infty$) et \mathcal{C}_f se trouve au-dessus de \mathcal{D} au voisinage de $+\infty$ et en dessous de \mathcal{D} au voisinage de $-\infty$. De plus la courbe \mathcal{C}_f a la droite \mathcal{D}' d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

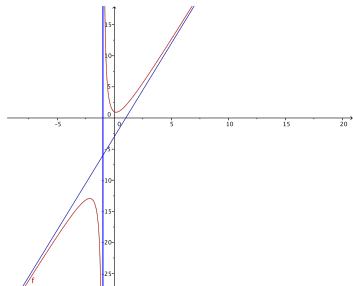


Figure: Courbe représentative (en rouge) de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2 + 1}{x + 1}$ et ses asymptotes \mathcal{D} et \mathcal{D}' (en bleu).

Généralités sur les fonctions.
Limites d'une fonction et asymptotes
Dérivée d'une fonction
Fonctions convexes

dérivabilité et tangente
opérations algébriques
dérivées de fonctions usuelles
dérivée d'une fonction composée
dérivée et sens de variation d'une fonction
dérivée et extremum relatif

Plan

- 1 Généralités sur les fonctions.
- 2 Limites d'une fonction et asymptotes
- 3 **Dérivée d'une fonction**
 - dérivabilité et tangente
 - opérations algébriques
 - dérivées de fonctions usuelles
 - dérivée d'une fonction composée
 - dérivée et sens de variation d'une fonction
 - dérivée et extremum relatif
- 4 Fonctions convexes

Dérivabilité d'une fonction.

Dans ce paragraphe, tous les intervalles de \mathbb{R} seront supposés non vides et non réduits à un point.

Corde et tangente

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit \mathcal{C}_f le graphe de f relativement à un repère (Oxy) du plan.

Soit $a \in I$ et $A(a, f(a)) \in \mathcal{C}_f$. Si $x \in I$ est tel que $x \neq a$ et si $M(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$, alors le coefficient directeur de la droite (AM) est $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

La position "limite", lorsqu'elle existe, de la corde (AM) lorsque M se "rapproche" du point A sur la courbe \mathcal{C}_f s'appelle la **tangente** en A à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f .

Fonction dérivable.

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant a .

- ▶ On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction définie sur $I \setminus \{a\}$ par $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a .
- ▶ On note cette limite $f'(a)$ et on l'appelle le nombre dérivé (ou la dérivée) de f en a .
- ▶ Si f est dérivable en tout point de l'intervalle I , on dit que f est dérivable sur I .
- ▶ Dans ce cas la fonction définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée (ou la dérivée) de f .
- ▶ Si f' est elle-même dérivable en a , on note sa dérivée $f''(a)$ (dérivée seconde de f en a) et on dit que f est deux fois dérivable en a .

Tangentes à la courbe représentative.

Proposition

Soit f une fonction numérique dérivable en a . Alors la courbe représentative \mathcal{C}_f de f relativement à un repère (Oxy) du plan a pour tangente au point $A(a, f(a))$ la droite de coefficient directeur $f'(a)$ passant par A .

Remarques

Si f est dérivable en a , la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(a, f(a))$ a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente verticale au point $A(a, f(a))$, qui est la droite d'équation $x = a$.

Opérations algébriques.

Soit u et v deux fonctions numériques dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Alors $u + v$ et uv sont dérivables sur I et

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Si de plus $v \neq 0$ sur I , alors les fonctions $1/v$ et u/v sont définies et dérivables sur I et

$$(1/v)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Dérivées de fonctions usuelles.

Exemples

- ▶ Soit f une fonction constante. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.
- ▶ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f définie par $f(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
- ▶ Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- ▶ Soit $q \in \mathbb{Q}^*$ et f définie par $f(x) = x^q$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = qx^{q-1}$.

Exemples

- ▶ Soit f définie par $f(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ Soit f définie par $f(x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ▶ Soit f définie par $f(x) = \ln x$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- ▶ Soit f définie par $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$.

Dérivée d'une fonction composée.

Soit u et g deux fonctions numériques telles que u soit définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} , et g soit définie et dérivable sur un intervalle J de \mathbb{R} contenant $u(I)$.

- ▶ Alors la fonction composée $g \circ u$ est définie et dérivable sur I et $(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$ pour tout $x \in I$.

Exemples

Soit u une fonction dérivable sur I .

- ▶ Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(u(x))$ pour tout $x \in I$. Alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) \cos(u(x))$ pour tout $x \in I$.
- ▶ Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(u(x))$ pour tout $x \in I$. Alors f est dérivable sur I et $f'(x) = -u'(x) \sin(u(x))$ pour tout $x \in I$.
- ▶ On suppose de plus que u est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* et soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(u(x))$ pour tout $x \in I$. Alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout $x \in I$.
- ▶ Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{u(x)}$. Alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ pour tout $x \in I$.

Variation des fonctions numériques.

Théorème

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- ▶ Pour que f soit **croissante** au sens large sur I , il faut et il suffit que sa dérivée soit partout ≥ 0 .
- ▶ Pour que f soit **décroissante** au sens large sur I , il faut et il suffit que sa dérivée soit partout ≤ 0 .
- ▶ Pour que f soit **constante**, il faut et il suffit que sa dérivée soit partout nulle.

Théorème

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- ▶ Si $f' \geq 0$ sur I et si f' s'annule en un nombre fini de points de I , alors f est strictement croissante sur I .
- ▶ Si $f' \leq 0$ sur I et si f' s'annule en un nombre fini de points de I , alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple

Soit f la fonction $x \mapsto x^3$. Alors $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ et $f'(x) = 0 \iff x = 0$, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Théorème

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant a et dérivable en a .

- ▶ *Si $f'(a) = 0$ est un extremum relatif de f alors $f'(a) = 0$ (mais ce n'est pas suffisant).*
- ▶ *Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe autour de a , alors $f(a)$ est un extremum relatif de f .*

Remarque

Attention la fonction $x \mapsto x^3$ n'admet pas 0 comme extremum relatif.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Alors 0 est un minimum relatif de f , et on a $f'(0) = 0$. Par contre il n'existe pas de réel $\alpha > 0$ tel que pour tous $x \in]-\alpha, 0[$, $f'(x)$ soient du même signe et pour tous $y \in]0, \alpha[$, $f'(y)$ soient du signe contraire. Autrement dit, on n'a pas la réciproque de la deuxième assertion du théorème précédent.

Courbe de l'exemple précédent, au voisinage de zéro.

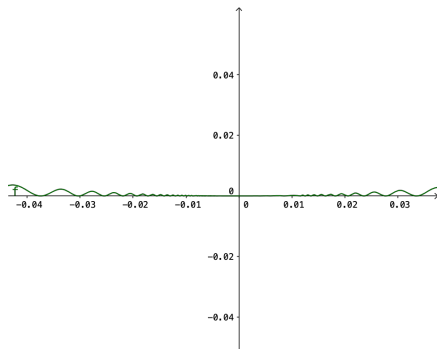


Figure: Agrandissement, au voisinage de zéro, de la courbe représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pour tout $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Plan

- 1 Généralités sur les fonctions.
- 2 Limites d'une fonction et asymptotes
- 3 Dérivée d'une fonction
- 4 Fonctions convexes

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et dérivable sur I .

- ▶ On dit que f est **convexe** sur I lorsque la courbe représentative de f se trouve au-dessus de chacune de ses tangentes.
- ▶ On dit que la fonction f est **concave** sur I lorsque la courbe représentative de f se trouve au-dessous de chacune de ses tangentes.

Remarque

Avec les hypothèses de la définition précédente, f est convexe sur I si, et seulement si, $-f$ est concave sur I .

Exemples

- ▶ La fonction exponentielle est convexe.
- ▶ La fonction Logarithme népérien est concave.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} et deux fois dérivable sur I .

La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

La fonction f est concave sur I si, et seulement si, $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.

Définition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et soit $c \in I$.

On dit que le point de coordonnées $(c, f(c))$ est un **point d'inflexion** de la courbe de f lorsqu'il existe $a, b \in I$, $a < c < b$, tels que :

f est convexe sur $]a, c[$ et concave sur $]c, b[$

ou f est concave sur $]a, c[$ et convexe sur $]c, b[$.

Théorème

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$) une fonction deux fois dérivable sur $]a, b[$ et soit $c \in]a, b[$.

Alors le point de coordonnées $(c, f(c))$ est un point d'inflexion de la courbe de f si, et seulement si :

$f''(c) = 0$ et f'' change de signe autour de c .

Remarque

En un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}_f) de f , la courbe (\mathcal{C}_f) "traverse" sa tangente en ce point.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 + \frac{5}{3}x^4$. Déterminer le(s) point(s) d'inflexion de la courbe de f , s'il(s) existe(nt).

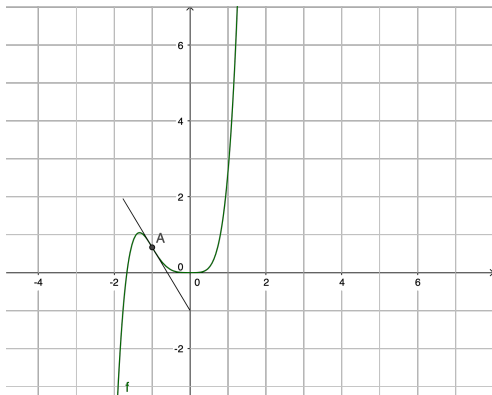


Figure: Le point $A(-1, \frac{2}{3})$ est un point d'inflexion de la courbe de f .