Chapitre 2: ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS.

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Algèbre bilinéaire
Année 2024-2025

Plan

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E est un espace vectoriel euclidien lorsqu'il est de dimension finie (non nulle) et qu'il est muni d'un produit scalaire.

Remarque

Si le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire mais est de dimension infinie, on dit que E est un espace préhilbertien réel.

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(.\mid.)$. Pour tout $u \in E$, on pose $\|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$.

- *Alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous u, $v \in E$, $|(u \mid v)| \leq \|u\|\|v\|$.*
- *L'application $\|.\| : u \mapsto \|u\| = \sqrt{(u \mid u)}$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne sur E, c'est-à-dire qu'elle vérifie les conditions suivantes :*
  - *pour tous u, $v \in E$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité de Minkowski).*
  - *pour tous $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$.*
  - *pour tout $u \in E$, $\|u\| = 0 \iff u = 0$.*
- *De plus l'inégalité de Minkowski est une égalité si, et seulement si, $v = 0$ ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $u = \alpha v$.*

Proposition

- *A partir de la norme euclidienne sur E, la distance euclidienne $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par $d(u, v) = \|u - v\|$, pour tous $u, v \in E$. C'est une distance, c'est-à-dire que cette application vérifie les propriétés suivantes :*
  - *pour tous $u, v, w \in E$, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (inégalité triangulaire).*
  - *pour tous $u, v \in E$, $d(v, u) = d(u, v)$.*
  - *pour tous $u, v \in E$, $d(u, v) = 0 \iff u = v$.*
- *Cette distance est invariante par translation, c'est-à-dire : pour tous $u, v, w \in E$, $d(u + w, v + w) = d(u, v)$.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tous $u, v \in E$, $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$.*

Théorème (Théorème de Pythagore)

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(.\mid .)$. Alors pour tout système orthogonal $(u_1, \ldots, u_m)$ de vecteurs de E, on a

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|u_k\|^2$$

Réciproque du théorème de Pythagore: Si $(u, v) \in E^2$ vérifie $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$, alors u et v sont orthogonaux (c'est-à-dire $(u \mid v) = 0$).

Proposition

Tout système orthonormal d'un espace vectoriel euclidien E peut être complété en une base orthonormale de E. On peut procéder comme suit (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt):
Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base quelconque de E.
Alors il existe une unique base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E vérifiant les conditions suivantes :

- *Pour tout entier p, $(e_p \mid v_p) > 0$.*
- *Pour tout entier p, $Vect(e_1, \ldots, e_p) = Vect(v_1, \ldots, v_p)$.*

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(. \mid .)$.

- *Alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire orthogonal. On a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$.*
- *L'application linéaire $u \mapsto (. \mid u)$ est un isomorphisme de E dans son dual E^* et l'image d'une base orthonormale de E par cet isomorphisme en est la base duale.*

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(. \mid .)$. Soit f un endomorphisme de E. Alors il existe un unique endomorphisme de E, appelé endomorphisme adjoint de f et noté f^* tel que : pour tous $u, v \in E$, $(f(u) \mid v) = (u \mid f^*(v))$.

Proposition

Soit f et g des endomorphismes de l'espace vectoriel euclidien E. Alors

- $f^{**} = f$
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- $\ker(f^*) = (Im(f))^{\perp}$ *et* $Im(f^*) = (\ker(f))^{\perp}$.
- $rg(f^*) = rg(f)$.

Proposition

Pour qu'un sous-espace vectoriel F de E soit stable par un endomorphisme f, il faut et il suffit que $F^{\perp}$ soit stable par f^*.

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathscr{B}$. Soit $f \in End(E)$ et f^* son adjoint. Alors si $M = Mat(f, \mathscr{B})$ et $M^* = Mat(f^*, \mathscr{B})$ on a

$$M^* = {}^tM.$$

On a donc $\mathrm{tr}(f^*) = \mathrm{tr}(f)$ *et* $\det(f^*) = \det(f)$.

Proposition-Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$. On peut donc définir le projecteur orthogonal sur F, qui est l'application $p : E \longrightarrow E$ définie par : pour tout $u \in E$, $p(u) = u'$ si $u = u' + u''$ avec $u' \in F$ et $u'' \in F^{\perp}$. On a alors

- $p \circ p = p$.
- $p \in End(E)$.
- $Im(p) = F$.
- $\ker(p) = F^{\perp}$.

Proposition

Soit $p \in End(E)$. Alors p est le projecteur orthogonal sur $Im(p)$ si, et seulement si, $p \circ p = p$ et $p^* = p$.

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in End(E)$. On dit que f est autoadjoint ou symétrique lorsque $f^* = f$.

Proposition

Soit $f \in End(E)$.

- *f est symétrique si, et seulement si, pour tous $u, v \in E$, $(f(u) \mid v) = (u \mid f(v))$.*
- *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et soit $M = Mat(f, \mathscr{B})$. f est symétrique si, et seulement si, ${}^tM = M$, c'est-à-dire si, et seulement si, M est symétrique.*

Exemple

Les projecteurs orthogonaux sont symétriques.

Définition

Soit $f \in End(E)$ tel que $f = f^*$ (E espace vectoriel euclidien de dimension n). Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E et $M = Mat(f, \mathscr{B})$.

- L'endomorphisme symétrique f est dit positif lorsque, pour tout $u \in E$, $(u \mid f(u)) \geq 0$, c'est-à-dire lorsque pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$.
- L'endomorphisme symétrique f est dit défini positif lorsque, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, $(u \mid f(u)) > 0$, c'est-à-dire lorsque pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.

Définition

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M$.

- On dit que M est symétrique positive lorsque, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX \geq 0$. On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices (c'est un cône fermé).
- On dit que M est symétrique définie positive lorsque, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$. On note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices (c'est un cône ouvert).

Exemple

Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques positifs (mais pas définis positifs en général).

Remarques

- On a une bijection évidente entre l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, resp. définis positifs, de E et $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, resp. $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, M est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, d'une forme quadratique positive, resp. définie positive, de $\mathbb{R}^n$.

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(. \mid .)$ et $f \in End(E)$. On dit que f est un endomorphisme orthogonal de E lorsque, pour tous $u, v \in E$, $(f(u) \mid f(v)) = (u \mid v)$.

Exemple

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. On sait que $E = F \oplus F^\perp$ et on définit la symétrie orthogonale par rapport à F, notée s_F, comme suit. Pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u', u'') \in F \times F^\perp$ tel que $u = u' + u''$ et $s_F(u) = u' - u''$. Alors s_F est un endomorphisme orthogonal de E.

Notation

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E (endomorphismes bijectifs de E).

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in End(E)$.

- $f \in \mathscr{O}(E) \iff \forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$.
- $f \in \mathscr{O}(E) \iff f^* \circ f = f \circ f^* = id_E$.
- $f \in \mathscr{O}(E) \iff f^* \in \mathscr{O}(E)$.
- $f \in \mathscr{O}(E) \iff f \in GL(E)$ *et* $f^{-1} \in \mathscr{O}(E)$.
- $f \in \mathscr{O}(E) \iff f \in GL(E)$ *et* $f^{-1} = f^*$.

Proposition

Soit $f \in End(E)$. Alors $f \in \mathscr{O}(E)$ si, et seulement si, pour toute base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Définition

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice M est orthogonale lorsque ${}^tM.M = I_n$.
On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E ($\dim E = n$) et $f \in End(E)$. Soit $M = Mat(f, \mathscr{B})$.

- $f \in \mathscr{O}(E) \iff M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
- *Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est orthogonale.*

Proposition-Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien.

- $(\mathscr{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. Ce sous-groupe est appelé groupe orthogonal de E.
- $(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$ des matrices carrées d'ordre n inversibles. Ce sous-groupe est appelé groupe orthogonal de degré n sur $\mathbb{R}$.
- Le groupe $(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathscr{O}(\mathbb{R}^n), \circ)$, où $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

Remarque

Si $f \in \mathscr{O}(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.
Si $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M) = \pm 1$.

Proposition-Définition

On pose $\mathscr{O}^+(E) = \{f \in \mathscr{O}(E);\ \det(f) = 1\}$ et $\mathscr{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R});\ \det(M) = 1\}$.

- $(\mathscr{O}^+(E), \circ)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathscr{O}(E), \circ)$, appelé groupe spécial orthogonal de E.
- $(\mathscr{O}_n^+(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, appelé groupe spécial orthogonal de degré n sur $\mathbb{R}$.
- Le groupe $(\mathscr{O}_n^+(\mathbb{R}), \times)$ est isomorphe au groupe $(\mathscr{O}^+(\mathbb{R}^n), \circ)$, avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Théorème (Théorème de réduction des endomorphismes symétriques)

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in End(E)$ un endomorphisme symétrique.

- *Alors f a toutes ses valeurs propres réelles, est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*
- *En d'autres termes, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.*

Corollaire

A toute matrice symétrique réelle M, on peut associer une matrice orthogonale réelle S et une matrice diagonale réelle D telles que $M = SDS^{-1} = SD{}^tS$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel euclidien et $f \in End(E)$ un endomorphisme symétrique.

- *Si f est positif, alors toutes les valeurs propres de f sont positives.*
- *Si f est défini positif, alors toutes les valeurs propres de f sont strictement positives.*

Définition

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, muni du produit scalaire $(. \mid .)$. Soit q une forme quadratique sur E (de forme polaire φ).

- Soit $I : E \longrightarrow E^*$ l'isomorphisme canonique défini par $I(u)(v) = (u \mid v)$ pour tous u, $v \in E$.
- Soit $g_\varphi : E \longrightarrow E^*$ l'application linéaire associée à φ, définie par $g_\varphi(u)(v) = \varphi(u, v)$, pour tous u, $v \in E$.
- L'opérateur associé à la forme quadratique q est l'endomorphisme $f_q = I^{-1} \circ g_\varphi$ de E.

Proposition

- *Avec les notations et hypothèses précédentes, l'endomorphisme f_q est l'unique endomorphisme de E vérifiant : pour tous $u, v \in E$, $(u \mid f_q(v)) = \varphi(u, v)$.*
- *L'endomorphisme f_q est symétrique.*
- *On a un isomorphisme évident entre l'espace $\mathscr{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E et l'espace des endomorphismes symétriques de E.*
- *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, pour le produit scalaire $(. \mid .)$. Alors la matrice de f_q dans $\mathscr{B}$ est égale à la matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ de q (ou φ) dans $\mathscr{B}$.*

Définition

Soit q une forme quadratique de l'espace vectoriel euclidien E et f_q l'opérateur associé à q.

- Tout vecteur propre de f_q est appelé vecteur principal de q.
- Toute direction de droites dirigée par un vecteur propre de f_q est appelée direction principale de q.
- Tout sous-espace propre de f_q est appelé sous-espace principal de q.

Définition

Soit q une forme quadratique sur l'espace vectoriel euclidien E et $b \in \mathbb{R}$.

- On appelle conique - si $\dim E = 2$ - ou quadrique sinon (à centre) d'équation $q(u) = b$ le triplet $(q, b, \mathscr{S})$ où $\mathscr{S}$ est l'ensemble des $u \in E$ tels que $q(u) = b$.
- $\mathscr{S}$ est appelé l'ensemble des points de la conique ou quadrique.
- Les vecteurs, directions ou sous-espaces principaux de q sont appelés vecteurs, directions ou sous-espaces principaux de la conique ou quadrique.

Remarque

D'après le théorème de réduction, il existe une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E (pour le produit scalaire) formée de vecteurs principaux de la conique ou quadrique.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ alors pour $u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les valeurs propres de f_q.
Donc

$$q(u) = b \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 = b. \qquad (*)$$

Définition

Une équation du type $(*)$ est appelée équation réduite de la conique ou quadrique (dans un repère orthonormal et principal).

Remarque

L'équation réduite montre que, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'hyperplan $(H_i) : x_i = 0$ est un hyperplan de symétrie de $\mathscr{S}$.

Exercice

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, trouver l'équation réduite en axes orthonormés de la conique $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + 2xy - 3y^2 = 1$. Quelles sont les directions principales ?

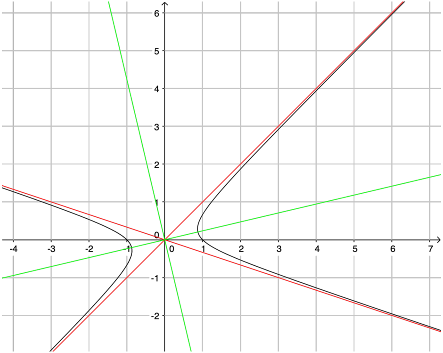


Figure: Hyperbole avec ses asymptotes et ses axes principaux

Coniques à centre en dimension deux

Ici E est un espace vectoriel euclidien de dimension deux et $\mathscr{E}$ est un espace affine associé à E. Soit q une forme quadratique *non dégénérée* sur E et $b \in \mathbb{R}$. On considère la conique $\mathscr{S} = \{m \in \mathscr{E} \mid q(\overrightarrow{om}) = b\}$ où $o \in \mathscr{E}$ est un point fixé (o est le centre de la conique $\mathscr{S}$). Alors il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1,\, e_2)$ de E formée de vecteurs propres de l'opérateur f_q associé à q telle que la conique $\mathscr{S}$ a pour équation, dans le repère $\mathscr{R} = (o;\, e_1,\, e_2)$,

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \varepsilon \frac{y^2}{\beta^2} = \varepsilon'.$$

avec α, β des nombres réels strictement positifs, $\varepsilon \in \{-1,\, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{0,\, 1,\, -1\}$.

- Si $\varepsilon' = 0$ et $\varepsilon = 1$ alors $\mathscr{S} = \{o\}$.
- Si $\varepsilon' = 0$ et $\varepsilon = -1$ alors $\mathscr{S}$ est la réunion de deux droites d'équation $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$ (sécantes en o).
- Si $\varepsilon' = -1$ et $\varepsilon = -1$ ou si $\varepsilon' = 1$ et $\varepsilon = -1$, alors $\mathscr{S}$ est une hyperbole, dont les asymptotes ont pour équation $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$.
- Si $\varepsilon' = 1$ et $\varepsilon = 1$, alors $\mathscr{S}$ est une ellipse.
- Si $\varepsilon' = -1$ et $\varepsilon = 1$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.

Quadriques à centre en dimension trois.

Ici E est un espace vectoriel euclidien de dimension trois et $\mathscr{E}$ est un espace affine associé à E. Soit q une forme quadratique *non dégénérée* sur E et $b \in \mathbb{R}$. On considère la quadrique $\mathscr{S} = \{m \in \mathscr{E} \mid q(\overrightarrow{om}) = b\}$ où $o \in \mathscr{E}$ est un point fixé (o est le centre de la quadrique $\mathscr{S}$). Alors il existe une base orthonormale $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E formée de vecteurs propres de l'opérateur f_q associé à q telle que la quadrique $\mathscr{S}$ a pour équation, dans le repère $\mathscr{R} = (o; e_1, e_2, e_3)$,

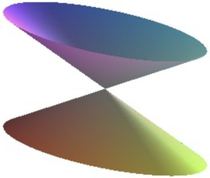
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \varepsilon\frac{z^2}{\gamma^2} = \varepsilon'.$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon' \in \{0, 1, -1\}$.

- Si $\varepsilon' = 0$ et $\varepsilon = 1$ alors $\mathscr{S} = \{o\}$.
- Si $\varepsilon' = 0$ et $\varepsilon = -1$ alors $\mathscr{S}$ est un cône.
- Si $\varepsilon' = -1$ et $\varepsilon = 1$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.
- Si $\varepsilon' = 1$ et $\varepsilon = 1$ alors $\mathscr{S}$ est un ellipsoïde.
- Si $\varepsilon' = 1$ et $\varepsilon = -1$, alors $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à une nappe.
- Si $\varepsilon' = -1$ et $\varepsilon = -1$, alors $\mathscr{S}$ est un hyperboloïde à deux nappes.

CÔNE ELLIPTIQUE

Elliptical cone, elliptischer Kegel



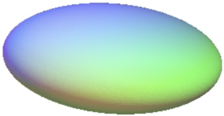
Autre nom : cône du second degré (en sous-entendant : non décomposé).

Équation réduite : $\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (avec $a \geq b$, cône de révolution si et seulement si $a = b$).

Les sections par le plan $z = k$ sont des ellipses de demi-axes ak/h et bk/h.

ELLIPSOÏDE

Ellipsoid, Ellipsoide



Équation cartésienne réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,

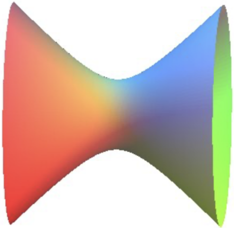
avec a (demi grand axe) $\geq b$ (demi axe moyen) $\geq c$ (demi petit axe) > 0.

Quand $a = b$ ou $b = c$: ellipsoïde de *révolution*, ou *sphéroïde* (sinon, l'ellipsoïde est dit *scalène*).

- quand $a = b$: ellipsoïde de révolution *aplati* (forme de galet ou de soucoupe volante)
- quand $b = c$: ellipsoïde de révolution *allongé* (forme de ballon de rugby ou de cigare)
- quand $a = b = c$: sphère.

HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE H_1

One-sheeted hyperboloid, einschaliges Hyperboloide



Surface étudiée par Christopher Wren en 1669.

Équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a \geq b$.

Quand $a = b$: hyperboloïde à une nappe de révolution.

Quand $a = b = c$: hyperboloïde à une nappe équilatère.

Petit exercice : quel est le type de la quadrique $xy+yz+zx-k(x+y+z)+1=0$?

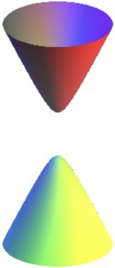
Réponse : par changement de repère ON tel que OZ soit la droite x=y=z on tombe sur

$$Z^2-\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=\frac{3k^2-4}{4}$$

Donc un H1 pour $|k|<2/\sqrt{3}$, un cône pour $|k|=2/\sqrt{3}$, un H2 pour $|k|>2/\sqrt{3}$ tous de révolution autour de OZ.

HYPERBOLOÏDE À DEUX NAPPES H_2

Two-sheeted hyperboloid, zweichaliges Hyperboloide



Équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $a \geq b$. Pour $a=b$: hyperboloïde à deux nappes de révolution. Pour $a=b=c$: hyperboloïde à deux nappes équilatère.	Petit exercice : quel est le type de la quadrique $xy+yz+zx-k(x+y+z)+1=0$? Réponse : par changement de repère O.N. tel que OZ soit la droite x=y=z on tombe sur $Z^2-\frac{X^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=\frac{3k^2-4}{4}$. Donc un H1 pour $\lvert k\rvert < 2/\sqrt{3}$, un cône pour $\lvert k\rvert = 2/\sqrt{3}$, un H2 pour $\lvert k\rvert > 2/\sqrt{3}$, tous de révolution autour de OZ.