

Chapitre 2: GEOMETRIE ANALYTIQUE AFFINE

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Géométrie 1
Année 2024-2025

Plan

- 1 Repères cartésiens.
 - définition d'un repère cartésien
- 2 Equations d'un sous-espace affine
- 3 Représentation paramétrique.
- 4 Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine
- 5 Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine de dimension trois

Dans tout ce chapitre (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine \mathcal{E} dont l'espace vectoriel associé est noté E . On suppose que \mathcal{E} est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque n prendra des valeurs particulières, on le précisera.

Définition

- ① Un **repère cartésien** de l'espace affine \mathcal{E} est un couple $\mathcal{R} = (o; \mathcal{B})$ où $o \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E . Le point o est appelé l'origine du repère \mathcal{R} et \mathcal{B} la base du repère \mathcal{R} .
- ② Si l'espace affine \mathcal{E} est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe sur E un produit scalaire, le repère cartésien \mathcal{R} est dit **orthogonal** si les vecteurs de sa base sont orthogonaux deux à deux, et **orthonormé** si \mathcal{R} est orthogonal et si chacun des vecteurs de la base est de norme 1.

Définition

Soit $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ un repère cartésien de \mathcal{E} .

- ▶ Soit $m \in \mathcal{E}$. Les **coordonnées (cartésiennes)** ou **système de coordonnées cartésiennes** de m dans le repère \mathcal{R} est le n -uplet de nombres réels $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\overrightarrow{om} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

On note $m(x_1, \dots, x_n)$.

- ▶ Soit $\vec{u} \in E$. Le système de coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est le n -uplet de nombres réels (X_1, \dots, X_n) tel que $\vec{u} = \sum_{i=1}^n X_i \vec{e}_i$. On note $\vec{u}(X_1, \dots, X_n)$.

Plan

- 1 Repères cartésiens.
- 2 Equations d'un sous-espace affine
 - équation(s) cartésienne(s) d'une partie de \mathcal{E}
- 3 Représentation paramétrique.
- 4 Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine
- 5 Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine de dimension trois

Equation(s) cartésienne(s) d'une partie de \mathcal{E} .

Définition

- ▶ On suppose que l'espace affine \mathcal{E} est muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$. Soit

$$\mathcal{F} = \{m \in \mathcal{E} \mid m(x_1, \dots, x_n) \text{ avec } (x_1, \dots, x_n) \in D \\ \text{et } f(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Alors l'équation $f = 0$ est appelée une **équation cartésienne** de \mathcal{F} (dans le repère \mathcal{R}). On note $\mathcal{F} : f = 0$.

Exemple

Lorsque l'espace affine \mathcal{E} est un plan affine euclidien, le cercle de \mathcal{E} de centre o et de rayon 1 a pour équation cartésienne dans le repère \mathcal{R} orthonormé d'origine o : $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Définition

- Soit k un entier supérieur ou égal à deux et soit f_1, \dots, f_k des fonctions numériques définies sur une partie D de \mathbb{R}^n et soit \mathcal{F} la partie de \mathcal{E} formée des points m de \mathcal{E} dont les coordonnées (x_1, \dots, x_n) vérifient $(x_1, \dots, x_n) \in D$ et $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Alors le système

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases} \text{ est appelé } \textbf{ système d'équations cartésiennes } \text{ de } \mathcal{F}$$

(dans le repère \mathcal{R}). On note $\mathcal{F} : \begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases}$.

Exemple

Dans l'espace euclidien \mathcal{E} de dimension trois muni d'un repère cartésien orthonormé \mathcal{R} d'origine o , le cercle de centre o et de rayon 1 du plan xoy a pour système d'équations cartésiennes dans

le repère \mathcal{R} :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Repères cartésiens.

Equations d'un sous-espace affine

Représentation paramétrique.

Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine

Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine

Plan

- 1 Repères cartésiens.
- 2 Equations d'un sous-espace affine
- 3 **Représentation paramétrique.**
- 4 Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine
- 5 Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine de dimension trois

Définition

Soit (\mathcal{F}, F) un sous-espace affine de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ de l'espace affine (\mathcal{E}, E) . Soit $a \in \mathcal{F}$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de F .

L'application $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto m \in \mathcal{E}; \overrightarrow{am} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{e}_i$ est une bijection de \mathbb{R}^p sur \mathcal{F} . On dit que cette bijection est une

paramétrisation de \mathcal{F} et que les \vec{e}_i forment un système de **vecteurs directeurs** de \mathcal{F} .

Exemple

Soit (\mathcal{D}, D) une droite affine de \mathcal{E} . Alors pour tout point $a \in \mathcal{D}$ et tout vecteur non nul $\vec{u} \in D$, \mathcal{D} peut être paramétrée par

$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto m \in \mathcal{E}; \overrightarrow{am} = \lambda \vec{u}$.

Représentation paramétrique d'une droite dans le plan.

On suppose que $\dim \mathcal{E} = 2$ et que \mathcal{E} est muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et soit \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} .

Soit $a(a_1, a_2)$ un point de \mathcal{D} et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de \mathcal{D} .

Soit $m \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) dans le repère \mathcal{R} .

$$\text{On a } m \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha \\ y = a_2 + \lambda\beta \end{cases} .$$

Le système d'équations $\begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha \\ y = a_2 + \lambda\beta \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ s'appelle une

représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} dans le repère \mathcal{R} .

Représentation paramétrique d'une droite dans un espace de dimension trois.

On suppose que $\dim \mathcal{E} = 3$ et que \mathcal{E} est muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et soit \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} .

Soit $a(a_1, a_2, a_3)$ un point de \mathcal{D} et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de \mathcal{D} . Soit $m \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère \mathcal{R} . On a

$$m \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha \\ y = a_2 + \lambda\beta \\ z = a_3 + \lambda\gamma \end{cases} .$$

Le système d'équations $\begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha \\ y = a_2 + \lambda\beta \\ z = a_3 + \lambda\gamma \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ s'appelle une

représentation paramétrique de la droite \mathcal{D} dans le repère \mathcal{R} .

Représentation paramétrique d'un plan dans un espace de dimension trois.

Avec les mêmes hypothèses sur l'espace affine \mathcal{E} que précédemment, on considère \mathcal{P} un plan affine de \mathcal{E} . Soit $a(a_1, a_2, a_3)$ un point de \mathcal{P} et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ des vecteurs de E formant un système de vecteurs directeurs de \mathcal{P} . Soit $m \in \mathcal{E}$ de coordonnées (x, y, z) dans le repère \mathcal{R} . On a

$$m \in \mathcal{P} \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = a_2 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = a_3 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} . \text{ On dit que}$$

le système d'équations $\begin{cases} x = a_1 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = a_2 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = a_3 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases} ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$ est

une **représentation paramétrique** du plan \mathcal{P} dans le repère \mathcal{R} .

Repères cartésiens.

Equations d'un sous-espace affine

Représentation paramétrique.

Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine

Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine

Plan

- 1 Repères cartésiens.
- 2 Equations d'un sous-espace affine
- 3 Représentation paramétrique.
- 4 Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine
- 5 Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine de dimension trois

On suppose ici que $n = 2$, c'est-à-dire que \mathcal{E} est un plan affine, que l'on munit du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Proposition

Soit \mathcal{D} une droite affine du plan affine \mathcal{E} . Alors il existe des nombres réels a, b, c avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que \mathcal{D} a pour équation cartésienne, dans le repère \mathcal{R} :

$$ax + by + c = 0.$$

La direction D de \mathcal{D} a pour équation cartésienne, dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , l'équation :

$$aX + bY = 0.$$

Proposition

L'espace affine \mathcal{E} est toujours un plan, muni du repère cartésien \mathcal{R} . Soit $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y + c' = 0$ deux droites du plan \mathcal{E} .

$$\begin{aligned} \mathcal{D} // \mathcal{D}' &\iff \exists k \in \mathbb{R}; a' = ka, b' = kb \\ &\iff ab' - a'b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \mathcal{D}' &\iff \exists k \in \mathbb{R}; a' = ka, b' = kb, c' = kc \\ &\iff ab' - a'b = 0, ac' - a'c = 0, bc' - b'c = 0 \\ &\iff \text{rang} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Repères cartésiens.

Equations d'un sous-espace affine

Représentation paramétrique.

Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine

Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine

plans dans un espace affine de dimension trois
droites dans un espace affine de dimension trois

Plan

- 1 Repères cartésiens.
- 2 Equations d'un sous-espace affine
- 3 Représentation paramétrique.
- 4 Equation cartésienne d'une droite dans un plan affine
- 5 Equation(s) cartésienne(s) de droites et plans dans un espace affine de dimension trois
 - plans dans un espace affine de dimension trois
 - droites dans un espace affine de dimension trois

On suppose ici que $n = 3$, c'est-à-dire que \mathcal{E} est un espace affine de dimension trois, que l'on munit du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Proposition

Soit \mathcal{P} un plan affine de \mathcal{E} . Alors il existe des nombres réels a, b, c, d avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que \mathcal{P} a pour équation cartésienne, dans le repère \mathcal{R} :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

La direction P de \mathcal{P} a pour équation cartésienne, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, l'équation :

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Proposition

Ici \mathcal{E} est toujours un espace affine de dimension trois, muni du repère cartésien \mathcal{R} . Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de \mathcal{E} .

$$\begin{aligned} \mathcal{P} // \mathcal{P}' &\iff \exists k \in \mathbb{R}; a' = ka, b' = kb, c' = kc \\ &\iff ab' - a'b = 0, ac' - a'c = 0, bc' - b'c = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}' &\iff \exists k \in \mathbb{R}; a' = ka, b' = kb, c' = kc, d' = kd \\ &\iff \text{rang} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

On suppose toujours que $\dim \mathcal{E} = 3$ muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Proposition

Soit \mathcal{D} une droite affine de \mathcal{E} . Alors il existe des nombres réels $a, a', b, b', c, c', d, d'$ avec $ab' - a'b \neq 0$ ou $ac' - a'c \neq 0$ ou $bc' - b'c \neq 0$ tels que \mathcal{D} ait pour système d'équations cartésiennes, dans le repère \mathcal{R} :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Proposition

Avec les hypothèses et notations précédentes, la direction D de la droite affine \mathcal{D} a pour système d'équations cartésiennes, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, le système :

$$\begin{cases} aX + bY + cZ = 0 \\ a'X + b'Y + c'Z = 0 \end{cases}$$

Proposition

Dans l'espace affine \mathcal{E} de dimension trois, muni du repère cartésien

\mathcal{R} , soit $\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ une droite de \mathcal{E} et

$\mathcal{P} : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ un plan de \mathcal{E} .

$$\mathcal{D} // \mathcal{P} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;$$

$$a'' = \lambda a + \mu a', \quad b'' = \lambda b + \mu b', \quad c'' = \lambda c + \mu c'$$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{P} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2;$$

$$a'' = \lambda a + \mu a', \quad b'' = \lambda b + \mu b', \quad c'' = \lambda c + \mu c', \quad d'' = \lambda d + \mu d'$$