

Chapitre 2: PRIMITIVES ET CALCULS D'AIRES

Florence Fauquant-Millet

L1 MIPC – Majeure Informatique – Université Jean Monnet
Outils Mathématiques
Année 2024-2025

Plan

- 1 Primitives.
- 2 Intégrales.
- 3 Calcul d'aires.

Plan

- 1 Primitives.
 - définition
 - primitives de fonctions usuelles
- 2 Intégrales.
- 3 Calcul d'aires.

Définition-Proposition

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I , où I est un intervalle de \mathbb{R} .

- ▶ On dit que f est **continue sur I** lorsque, pour tout $a \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.
- ▶ Une fonction dérivable sur I est continue sur I (mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie).
- ▶ On suppose que f est continue sur I . Alors f admet une **primitive** sur I , c'est-à-dire une fonction F définie et dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2$. Alors f est continue sur \mathbb{R} et admet comme primitive, la fonction F définie par $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$.

Proposition

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors si F est une primitive de f sur I , toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + k$ où k est une constante réelle.

Notation

Soit F une primitive de f sur I . On note parfois

$$F = \int f(x) dx.$$

Primitives de fonctions usuelles (à connaître).

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

fonction $f(x)$	primitive $F(x)$	intervalle de définition de F
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + Cte$	\mathbb{R}
$x^q \ (q \in \mathbb{R}, q \neq -1)$	$\frac{x^{q+1}}{q+1} + Cte$	\mathbb{R}_+^*
$e^{ax} \ (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{e^{ax}}{a} + Cte$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x + Cte$	\mathbb{R}_+^*
$\cos(ax + b) \ (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + Cte$	\mathbb{R}
$\sin(ax + b) \ (a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R})$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + Cte$	\mathbb{R}
$\frac{u'(x)}{u(x)} \ (u \text{ de signe constant sur } I)$	$\ln u(x) + Cte$	I
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + Cte$	I
$u'(x)(u(x))^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + Cte$	I

Plan

1 Primitives.

2 Intégrales.

- définition
- remarques
- propriétés
- intégration par parties

3 Calcul d'aires.

Définition de l'intégrale simple.

Définition (Intégrale simple)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur l'intervalle I de \mathbb{R} et soient a et b deux éléments de I . Soit F une primitive de f sur I .

Alors l'intégrale (simple) de a à b de f , notée $\int_a^b f(t) dt$, est le nombre réel donné par la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Remarques.

- ▶ La variable dans le symbole d'intégration est une "variable muette". On peut l'appeler t ou x ou u etc... mais toujours une lettre distincte des extrémités de l'intervalle d'intégration.
- ▶ Attention : ne pas confondre $\int f(t) dt$, qui désigne une fonction (c'est une primitive de f) alors que $\int_a^b f(t) dt$ est un nombre réel.

Propriétés

Proposition (Propriété 1)

Soit F et G des primitives de la même fonction numérique f continue sur l'intervalle I de \mathbb{R} . On sait qu'il existe une constante C de \mathbb{R} telle pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.

Alors pour tous nombres $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Proposition (Propriété 2 : Relation de Chasles)

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .
Alors pour tous nombres a, b, c de I on a :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Propriétés

Proposition (Propriété 3)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de \mathbb{R} . Alors pour tous $a, b \in I$, on a

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Proposition (Propriété 4 : Linéarité)

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur l'intervalle I de \mathbb{R} .
Alors pour tous nombres réels λ et μ , et pour tous nombres réels $a, b \in I$ on a :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

En particulier

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Proposition (Propriété 5 : Positivité)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **positive** sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} (avec $a < b$) et continue.

Alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Conséquences de la positivité

Proposition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} (avec $a < b$) telles que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$.

Alors

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Changement de variables

Proposition

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I intervalle de \mathbb{R}) une fonction dérivable sur I dont la dérivée φ' est continue et $f : \varphi(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors on a la **formule de changement de variables** suivante : pour tous $a, b \in I$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Rq : dans la pratique, on pose $x = \varphi(t)$. Alors $dx = \varphi'(t) dt$. De plus attention à bien changer aussi les extrêmités de l'intervalle d'intégration !

Propriétés - Conséquences

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- ▶ Si f est paire, alors pour tout $a \in I$ tel que $-a \in I$,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

- ▶ Si f est impaire, alors pour tout $a \in I$ tel que $-a \in I$,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

- ▶ Si f est périodique de période T , alors quels que soient les nombres réels a et b de I tels que $a + T$ et $b + T$ soient aussi dans I ,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Intégration par parties

Proposition

Soient u et v deux fonctions numériques définies sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et dérivables sur $[a, b]$ et dont les dérivées sont continues.

Alors on a la **formule d'intégration par parties** suivante :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

Plan

- 1 Primitives.
- 2 Intégrales.
- 3 Calcul d'aires.**

Calcul d'aires.

Proposition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} (avec $a < b$). On note \mathcal{A} l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C}_f de f d'une part, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ d'autre part.

- ▶ Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

- ▶ Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$, alors

$$\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx.$$

Proposition

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a < b$) telles que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$. Soit \mathcal{A} l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentant respectivement f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Alors

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Proposition

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} ($a < b$) telle qu'il existe $c \in]a, b[$ pour lequel f est positive sur l'intervalle $[a, c]$ et négative sur l'intervalle $[c, b]$.

Alors l'aire \mathcal{A} de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C}_f de f d'une part, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ d'autre part est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx.$$