Chapitre 3: ISOMETRIES VECTORIELLES ET AFFINES.

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Algèbre bilinéaire
Année 2024-2025

Plan

- Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni du produit scalaire $(. \mid .)$ (et de la norme euclidienne associée $\|.\|$) et $\mathscr{E}$ désigne un espace affine d'espace vectoriel associé E.
- On dit alors que l'espace affine $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien. L'espace affine $\mathscr{E}$ est muni de la distance euclidienne d définie par : pour tous $m,\ n \in \mathscr{E}$, $d(m,\ n) = \|\overrightarrow{mn}\|$.
- Si $o \in \mathscr{E}$, alors pour tous points $m,\ n \in \mathscr{E}$, on a $d(m,\ n) = d_E(\overrightarrow{om},\ \overrightarrow{on})$ où d_E est la distance euclidienne sur l'espace vectoriel euclidien E.

Proposition 1

Soit a, b, $c \in \mathscr{E}$ des points de $\mathscr{E}$. Alors

- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ *(inégalité triangulaire).*
- $d(a, b) = d(b, a)$.
- $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
- $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c) \iff b \in [a, c]$.

- Orienter E (ou $\mathscr{E}$) c'est choisir une base orthonormale $\mathscr{B}$ de E, qu'on dira directe. Soit $\mathscr{B}'$ une autre base orthonormale de E. On sait que la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est orthogonale ($P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$). On dit que la base orthonormale $\mathscr{B}'$ est directe lorsque P appartient à $\mathscr{O}_n^+(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire $\det(P) = 1$).
- Un repère cartésien $\mathscr{R} = (O;\ \mathscr{B})$ de l'espace affine $\mathscr{E}$ ($O \in \mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ base de E) est dit orthonormal, resp. orthonormal direct, lorsque $\mathscr{B}$ est une base orthonormale, resp. orthonormale directe, de E.
- Une base orthonormale de E qui n'est pas directe est dite indirecte.

Définition 2

- Un endomorphisme orthogonal de E est aussi appelé isométrie vectorielle de E.
- Une isométrie ou isométrie affine de $\mathscr{E}$ est une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que l'application vectorielle associée est une isométrie vectorielle de E.

Définition 3

Soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une application. On dit que f conserve les distances lorsque

- pour tout $(m, n) \in \mathscr{E} \times \mathscr{E}$, $d(m, n) = d(f(m), f(n))$.

Proposition 4

Soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une application. Alors f est une isométrie si, et seulement si, f conserve les distances.

Proposition 5

Toute isométrie de $\mathscr{E}$ est bijective.

Exemples 6

- Les symétries affines orthogonales sont des isométries de $\mathscr{E}$.
- Les translations sont des isométries de $\mathscr{E}$: on notera, pour $\vec{v} \in E$, $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$.

Proposition 7

- *Notons $\mathscr{I}(\mathscr{E})$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$. Alors $(\mathscr{I}(\mathscr{E}), \circ)$ est un groupe.*
- *Notons $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ l'ensemble des isométries directes ou déplacements de $\mathscr{E}$, c'est-à-dire l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est dans $\mathscr{O}^+(E)$. Alors $(\mathscr{I}^+(\mathscr{E}), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{I}(\mathscr{E}), \circ)$.*
- *Notons $\mathscr{I}^-(\mathscr{E})$ l'ensemble $\mathscr{I}(\mathscr{E}) \setminus \mathscr{I}^+(\mathscr{E})$: c'est l'ensemble des antidéplacements ou isométries indirectes de $\mathscr{E}$.*

Lemme 8

Soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une application affine de partie linéaire $\vec{f}$ telle que $Fix(f) \neq \emptyset$ et soit $\vec{v} \in E$. Alors $t_{\vec{v}} \circ f = f \circ t_{\vec{v}} \iff \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$.

Lemme 9

Soit $\vec{f}$ une isométrie vectorielle de E, c'est-à-dire $\vec{f} \in \mathscr{O}(E)$. Alors $E = \ker(\vec{f} - Id_E) \overset{\perp}{\oplus} Im(\vec{f} - Id_E)$.

Lemme 10

Soit $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ une application affine de partie linéaire $\vec{f}$.

1. *Si $Fix(f) \neq \emptyset$ alors $Fix(f)$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction le sous-espace vectoriel $\ker(\vec{f} - Id_E)$.*
2. *Si $\ker(\vec{f} - id_E) = \{\vec{0}_E\}$ alors $Fix(f) \neq \emptyset$ et plus précisément $Fix(f)$ est un singleton.*
3. *Si f est une isométrie alors il existe $\vec{v} \in E$ et une isométrie g de $\mathscr{E}$ tels que $Fix(g) \neq \emptyset$ et $f = t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$ et $\vec{g}(\vec{v}) = \vec{v}$. De plus un tel couple $(\vec{v}, g)$ est unique.*

Théorème 11

On suppose que $\dim E = 2$ *et que* E *est orienté par le choix d'une base orthonormale* $\mathscr{B}$*.*

- *Alors* $\mathscr{O}^+(E)$ *est l'ensemble de toutes les rotations* r_θ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$ *définies par* $Mat(r_\theta, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = S_\theta$.
- *De plus si* $\mathscr{B}'$ *est une autre base orthonormale directe de* E*, alors* $Mat(r_\theta, \mathscr{B}') = Mat(r_\theta, \mathscr{B})$.

Théorème 12

On suppose toujours que $\dim E = 2$ *et que* E *est orienté par le choix d'une base orthonormale* $\mathscr{B}$.

- *On a un isomorphisme canonique entre le groupe* $(\mathscr{O}^+(E), \circ)$ *et le groupe* $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +)$ *en associant à toute rotation* $r \in \mathscr{O}^+(E)$ *l'unique élément* $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *tel que la matrice de* r *dans n'importe quelle base orthonormale directe de* E *est égale à la matrice* S_θ.
- *Le nombre réel* θ *(modulo* $2\pi\mathbb{Z}$*) est appelé la mesure ou l'angle de la rotation* r_θ *associée.*

Théorème 13

On suppose encore que $\dim E = 2$ *et que* E *est orienté par le choix d'une base orthonormale* $\mathscr{B}$.
Alors $\mathscr{O}^-(E) = \mathscr{O}(E) \setminus \mathscr{O}^+(E)$ *est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport aux droites de* E*, qu'on appelle encore* ***symétries axiales****.*
Elles sont représentées, dans la base orthonormale $\mathscr{B}$*, par une matrice* $S'_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$*, avec* $\theta \in \mathbb{R}$*.*

Définition 14

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 2$ et que $\mathscr{E}$ est orienté par le choix d'un repère orthonormal direct. Soit $\omega \in \mathscr{E}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation $r_{\omega,\theta}$ de centre ω et d'angle θ est l'isométrie directe de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est la rotation r_θ d'angle θ de E et telle que $r_{\omega,\theta}(\omega) = \omega$.

Remarque 15

Si $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$, alors $Fix(r_{\omega,\theta}) = \{\omega\}$.

Définition 16

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 2$ et soit δ une droite (affine) de $\mathscr{E}$, de direction $\overrightarrow{\delta}$ et $\vec{v} \in \overrightarrow{\delta}$.

- La symétrie axiale, ou réflexion, d'axe δ, notée s_δ, est l'isométrie indirecte de $\mathscr{E}$, de partie linéaire la symétrie orthogonale par rapport à la direction $\overrightarrow{\delta}$ de δ, et telle que, pour tout $a \in \delta$, $s_\delta(a) = a$.
- La symétrie-glissée, ou réflexion-glissée, d'axe δ et de vecteur $\vec{v}$ est $t_{\vec{v}} \circ s_\delta = s_\delta \circ t_{\vec{v}}$. C'est une isométrie indirecte n'ayant aucun point fixe, si $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Remarque 17

Soit δ une droite de $\mathscr{E}$. Alors $Fix(s_\delta) = \delta$.

Théorème 18

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 2$ *et* $\mathscr{E}$ *orienté.*

- $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ *est l'ensemble de toutes les translations de* $\mathscr{E}$ *et de toutes les rotations de centre un point de* $\mathscr{E}$ *et d'angle non congru à zéro modulo* 2π*.*
- $\mathscr{I}^-(\mathscr{E})$ *est l'ensemble de toutes les réflexions par rapport à une droite de* $\mathscr{E}$ *et de toutes les réflexions-glissées par rapport à une droite de* $\mathscr{E}$ *et de vecteur non nul.*

Théorème 19

On suppose que $\dim E = 3$ *et que* E *est orienté par le choix d'une base orthonormale* $\mathscr{B}$.
Soit $\varphi \in \mathscr{O}(E)$. *Alors il existe* $\varepsilon = \pm 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ *une base orthonormale directe de* E *tels que*

$$Mat(\varphi, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque 20

- $\det(\varphi) = \varepsilon$.
- $\varphi \in \mathscr{O}^+(E) \iff \varepsilon = 1$.
- $\varphi \in \mathscr{O}^-(E) \iff \varepsilon = -1$.

On suppose toujours que $\dim E = 3$ et E orienté. Soit $\varphi \in \mathscr{O}^+(E)$. On applique le théorème précédent avec $\varepsilon = 1$.

- Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ alors $\varphi = id_E$.
- Sinon soit $D = Vect(e_1)$ et $P = Vect(e_2, e_3)$. Alors la droite D est orthogonale au plan P et le plan P est orienté par le choix de la base orthonormale directe (e_2, e_3) de P de sorte que (e_1, e_2, e_3) soit une base directe de E. De plus la droite D est invariante par φ et $\varphi_{|P}$ est la rotation d'angle θ du plan P orienté.

Définition 21

L'isométrie directe φ est appelée rotation d'axe D (orientée par le vecteur e_1) et d'angle θ.

Remarque 22

Si on change l'orientation de la droite D, alors l'angle θ est changé en son opposé.

Corollaire 23

En convenant que l'identité de E est aussi une rotation d'axe n'importe quelle droite de E et d'angle nul, on en déduit que pour $\dim E = 3$, $\mathscr{O}^+(E)$ *est l'ensemble formé de toutes les rotations de* E*.*

On suppose toujours $\dim E = 3$ et E orienté. Soit $\varphi \in \mathscr{O}^-(E)$ et on applique le théorème précédent avec $\varepsilon = -1$.

- Si $\theta \equiv \pi \mod 2\pi$, alors $Mat(\varphi, \mathscr{B}') = -I_3$ et donc $\varphi = -id_E$.
- Sinon $\dim \ker(\varphi + id_E) = 1$ et $Vect(e_1) = D = \ker(\varphi + id_E)$ et $P = D^\perp = Vect(e_2, e_3)$.
  - Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $P = \ker(\varphi - id_E)$ et φ est la réflexion par rapport au plan P.
  - Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\varphi = r \circ \sigma = \sigma \circ r$ où r est la rotation d'axe D orienté par e_1 et d'angle θ et σ est la réflexion par rapport au plan $P = D^\perp$. On dit que φ est la réflexion-rotation de E d'axe D orienté par e_1 et d'angle θ.

Corollaire 24

En convenant que $-\mathrm{id}_E$ est la réflexion-rotation d'axe n'importe quelle droite de E et d'angle π, on en déduit alors que, pour $\dim E = 3$, $\mathscr{O}^-(E)$ est l'ensemble formé de toutes les réflexions de E et toutes les réflexions-rotations de E.

Définition 25

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 3$ et que $\mathscr{E}$ est orienté. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation $r_{\mathscr{D},\theta}$ d'axe $\mathscr{D}$ orienté par le choix d'un vecteur $\vec{u}$ de $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ et d'angle θ est l'isométrie directe de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est la rotation d'axe $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ et telle que, pour tout $m \in \mathscr{D}$, $r_{\mathscr{D},\theta}(m) = m$.

Remarque 26

Si $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$ alors $Fix(r_{\mathscr{D},\theta}) = \mathscr{D}$.

Définition 27

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 3$ et que $\mathscr{E}$ est orienté. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ (orientée par le choix d'un vecteur $\vec{u}$), $\theta \in \mathbb{R}$, et soit $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{D}}$. Le vissage d'axe $\mathscr{D}$, d'angle θ et de vecteur $\vec{v}$ est l'isométrie directe de $\mathscr{E}$ égale à $t_{\vec{v}} \circ r_{\mathscr{D},\theta} = r_{\mathscr{D},\theta} \circ t_{\vec{v}}$.

Remarque 28

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $Fix(t_{\vec{v}} \circ r_{\mathscr{D},\theta}) = \emptyset$.

Théorème 29

On suppose que $\dim \mathscr{E} = 3$ *et que* $\mathscr{E}$ *est orienté. Alors* $\mathscr{I}^+(\mathscr{E})$ *est l'ensemble formé de*

- *toutes les translations de* $\mathscr{E}$,
- *toutes les rotations d'axe une droite (orientée) de* $\mathscr{E}$ *et d'angle non congru à zéro modulo* 2π,
- *et tous les vissages d'axe une droite (orientée) de* $\mathscr{E}$ *et d'angle non congru à zéro modulo* 2π *et de vecteur non nul.*

Définition 30

Soit $\mathscr{P}$ un plan de $\mathscr{E}$ ($\dim \mathscr{E} = 3$) et soit $\vec{v}$ un vecteur de E appartenant à la direction $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$.

- La réflexion par rapport au plan $\mathscr{P}$, notée $s_{\mathscr{P}}$, est l'isométrie indirecte de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est la réflexion de E par rapport à la direction $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{P}$ et telle que, pour tout $m \in \mathscr{P}$, $s_{\mathscr{P}}(m) = m$.
- La réflexion-glissée ou symétrie-glissée par rapport au plan $\mathscr{P}$ et de vecteur $\vec{v}$ est l'isométrie indirecte de $\mathscr{E}$ égale à la composée $t_{\vec{v}} \circ s_{\mathscr{P}} = s_{\mathscr{P}} \circ t_{\vec{v}}$.

Remarque 31

- $Fix(s_{\mathscr{P}}) = \mathscr{P}$.
- Si $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$, alors $Fix(t_{\vec{v}} \circ s_{\mathscr{P}}) = \emptyset$.

Définition 32

On suppose toujours $\dim \mathscr{E} = 3$ et $\mathscr{E}$ orienté. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ (de direction $\overrightarrow{\mathscr{D}}$, orientée par le choix d'un vecteur $\vec{u}$) et soit $\mathscr{P}$ un plan orthogonal à $\mathscr{D}$ (de direction $\overrightarrow{\mathscr{P}} = \overrightarrow{\mathscr{D}}^{\perp}$). Soit ω l'unique point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- La réflexion-rotation f d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle θ est l'isométrie indirecte de $\mathscr{E}$ dont la partie linéaire est la réflexion-rotation de E d'axe $\overrightarrow{\mathscr{D}}$ et d'angle θ et telle que $f(\omega) = \omega$.

Remarque 33

On a $f = s_{\mathscr{P}} \circ r_{\mathscr{D},\theta} = r_{\mathscr{D},\theta} \circ s_{\mathscr{P}}$ et $Fix(f) = \{\omega\}$ si $\theta \not\equiv 0 \mod 2\pi$.

Théorème 34

On suppose $\dim \mathscr{E} = 3$ *et* $\mathscr{E}$ *orienté. Alors* $\mathscr{I}^-(\mathscr{E})$ *est l'ensemble formé de*

- *toutes les réflexions de* $\mathscr{E}$ *par rapport à un plan de* $\mathscr{E}$,
- *toutes les réflexions-rotations de* $\mathscr{E}$ *(d'axe une droite de* $\mathscr{E}$ *et d'angle non congru à zéro modulo* 2π*),*
- *et toutes les réflexions-glissées de* $\mathscr{E}$ *(par rapport à un plan de* $\mathscr{E}$ *et de vecteur non nul).*