

## Chapitre 3 : APPLICATIONS AFFINES

Florence Fauquant-Millet

L2 MATHS – Géométrie 1  
Année 2024-2025

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme
- 4 Homothéties et translations
- 5 Projections et symétries affines

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
  - définition
  - composée de deux applications affines et condition d'injectivité, de surjectivité
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme
- 4 Homothéties et translations
- 5 Projections et symétries affines

# Définition

## Définition

Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  des espaces affines d'espaces vectoriels associés respectifs  $E$  et  $F$ . Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite **affine** lorsqu'il existe  $a \in \mathcal{E}$  et une application **linéaire**  $\vec{f} : E \rightarrow F$  tels que : pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{f(a)f(m)} = \vec{f}(\overrightarrow{am})$ . Alors l'application linéaire  $\vec{f}$  est unique et, pour tout point  $b \in \mathcal{E}$ , on a pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{f(b)f(m)} = \vec{f}(\overrightarrow{bm})$ . On dit que  $\vec{f}$  est **l'application linéaire associée à  $f$  ou la partie linéaire de  $f$**  et on la note aussi parfois  $L(f)$ . On a alors

- ① pour tous  $p, q \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \vec{f}(\overrightarrow{pq})$ .
- ② pour tout  $m \in \mathcal{E}$ , pour tout  $\vec{u} \in E$ , si  $n \in \mathcal{E}$  est tel que  $\overrightarrow{mh} = \vec{u}$ , on a  $\overrightarrow{f(m)f(n)} = \vec{f}(\vec{u})$ .

## Remarques

- ▶ Pour démontrer qu'une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est affine, il suffit de montrer que, pour un certain  $a \in \mathcal{E}$  fixé, l'application vectorielle  $\vec{f}_a : E \rightarrow F$  est linéaire.
 
$$\vec{u} = \overrightarrow{am} \mapsto \overrightarrow{f(a)f(m)}$$
- ▶ Soit  $a \in \mathcal{E}$ ,  $b \in \mathcal{F}$  et  $\vec{f} : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors il existe une unique application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  d'application linéaire associée  $\vec{f}$  telle que  $f(a) = b$ .

## Exemples

- ▶ Une application constante de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est une application affine.
- ▶ Une translation de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  est une application affine.
- ▶ La projection affine sur le sous-espace affine  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{E}$  (de direction  $F$ ) parallèlement au sous-espace affine  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{E}$  (de direction  $G$  telle que  $F \oplus G = E$ ) est une application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$ .

# Composée de deux applications affines

## Proposition

*Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  et  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  des applications affines. Alors la composée  $g \circ f$  est une application affine et  $L(g \circ f) = L(g) \circ L(f)$ .*

# Condition d'injectivité, de surjectivité

## Proposition

Soit  $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$  une application affine.

- ▶ Pour que  $f$  soit injective, resp. surjective, il faut et il suffit que sa partie linéaire  $L(f) : E \longrightarrow F$  le soit.
- ▶ Si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$  est aussi affine.
- ▶ Si  $\mathcal{F} = \mathcal{E}$  et si  $\dim \mathcal{E} < \infty$ , alors  $f$  est bijective si, et seulement si,  $f$  est injective, resp. surjective.

## Définition

Une application affine bijective est appelée un **isomorphisme affine**.

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine**
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme
- 4 Homothéties et translations
- 5 Projections et symétries affines

# Image d'un sous-espace affine par une application affine

Soit  $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$  une application affine (d'application linéaire associée  $\vec{f}$ ).

## Proposition

- ▶ Soit  $\mathcal{E}'$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . Alors  $f(\mathcal{E}')$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{E}' = a + E'$  (avec  $a \in \mathcal{E}$  et  $E'$  la direction de  $\mathcal{E}'$ ) alors  $f(\mathcal{E}') = f(a) + \vec{f}(E')$ .
- ▶ Donc si trois points (resp. quatre) sont alignés (resp. coplanaires) dans  $\mathcal{E}$ , alors leurs images par  $f$  sont alignées (resp. coplanaires) dans  $\mathcal{F}$ .
- ▶ Mais l'image d'une droite (resp. un plan) par  $f$  n'est pas toujours une droite (resp. un plan), car cette image peut être de dimension plus petite.

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme**
- 4 Homothéties et translations
- 5 Projections et symétries affines

## Proposition

*Une application affine conserve les milieux, l'alignement des points et le parallélisme des sous-espaces affines.*

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme
- 4 Homothéties et translations**
  - translations
  - homothéties
- 5 Projections et symétries affines

## Définition

Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine et  $\vec{v} \in E$ . La **translation** de vecteur  $\vec{v}$ , notée  $t_{\vec{v}}$ , est l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même définie par : pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $t_{\vec{v}}(m) = m'$  vérifiant  $\overrightarrow{mm'} = \vec{v}$ .

## Proposition

- ▶ La translation de vecteur  $\vec{v}$  est une application affine bijective, dont l'application réciproque est  $t_{-\vec{v}}$ .
- ▶ L'application linéaire associée à une translation de  $\mathcal{E}$  est l'identité de  $E$ . Réciproquement toute application affine de  $\mathcal{E}$  dans lui-même dont la partie linéaire est l'identité  $\text{Id}_E$  de  $E$  est une translation de  $\mathcal{E}$ .

## Définition

Soit  $\omega \in \mathcal{E}$  et  $k \in \mathbb{R}^*$ . L'**homothétie (affine)** de centre  $\omega$  et de rapport  $k$ , notée  $h_{\omega, k}$ , est l'application de  $\mathcal{E}$  dans lui-même définie par : pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $h_{\omega, k}(m) = m'$  tel que  $\overrightarrow{\omega m'} = k\overrightarrow{\omega m}$ .

## Exemple

L'homothétie de centre  $\omega$  et de rapport  $-1$  s'appelle **la symétrie centrale de centre  $\omega$** .

## Proposition

- ▶ L'homothétie (affine)  $h_{\omega, k}$  est une application affine bijective, dont l'application réciproque est  $h_{\omega, 1/k}$ .
- ▶ La partie linéaire de  $h_{\omega, k}$  est l'homothétie vectorielle  $kId_E$ .
- ▶ Toute application affine de  $\mathcal{E}$  dans lui-même dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle (de rapport non nul) est une homothétie affine ou une translation de  $\mathcal{E}$ .
- ▶ L'ensemble des homothéties affines et des translations de  $\mathcal{E}$ , muni de la loi de composition des applications, est un groupe, appelé **groupe des homothéties-translations** de  $\mathcal{E}$ .
- ▶ Les homothéties affines et les translations de  $\mathcal{E}$  transforment une droite affine en une droite affine qui lui est parallèle.

# Plan

- 1 Définition et premières propriétés
- 2 Image d'un sous-espace affine par une application affine
- 3 Conservation du milieu, de l'alignement et du parallélisme
- 4 Homothéties et translations
- 5 **Projections et symétries affines**
  - projections
  - symétries affines

## Définition

Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine et soit  $(\mathcal{F}, F)$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  supplémentaire de  $F$  dans  $E$ . Pour tout point  $m$  de  $\mathcal{E}$ , notons  $\mathcal{G}_m$  le sous-espace affine passant par  $m$  et de direction  $G$ . Alors on sait que, pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}_m$  est un singleton. **La projection (affine)** sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $G$ , est l'application  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par : pour tout  $m \in \mathcal{E}$ ,  $p(m) = m'$  où  $m'$  est l'unique point d'intersection de  $\mathcal{F}$  et du sous-espace affine  $\mathcal{G}_m$  de  $\mathcal{E}$  passant par  $m$  et de direction  $G$ .

## Proposition

*Soit  $p$  la projection affine sur  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $G$ .*

- ▶ *Alors  $p$  est une application affine, d'application linéaire associée la projection vectorielle sur  $F$  parallèlement à  $G$ .*
- ▶ *On a  $p \circ p = p$  et l'ensemble des points fixes de  $p$  est  $\mathcal{F}$ .*

## Théorème

*Tout endomorphisme affine  $p$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $p \circ p = p$  est une projection affine.*

## Définition

Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine et soit  $(\mathcal{F}, F)$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . Soit  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$  supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et  $p$  la projection affine sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $G$ . La **symétrie affine** par rapport à  $\mathcal{F}$ , parallèlement à  $G$ , est l'application  $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  définie par : pour tout point  $m \in \mathcal{E}$ ,  $s(m) = m'$  où  $m'$  est l'unique point de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{mm'} = 2\overrightarrow{mp(m)}$ .

## Proposition

*On reprend les notations précédentes.*

- ▶ *L'application  $s$  est affine, et son application linéaire associée est la symétrie vectorielle par rapport à  $F$ , parallèlement à  $G$ .*
- ▶ *L'application  $s$  est involutive et donc bijective.*
- ▶ *L'ensemble des points fixes de  $s$  est  $\mathcal{F}$ .*