

Groupe de Travail sur Les Propriétés Homologiques et Homotopiques des Groupes de Tresses.

Exposé sur les Systèmes de Racines et le Groupe de Weyl.

Florence Fauquant-Millet

Université de Lyon - Université Jean Monnet de Saint-Etienne - Institut Camille
Jordan

15 avril - 6 mai 2021

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Références

- ▶ N. BOURBAKI : Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6 (Masson): toutes les sections sauf la dernière.
- ▶ N. BOURBAKI : Groupes et Algèbres de Lie, Chap. 7 et 8 (Springer): toutes les sections sauf la dernière.
- ▶ P. TAUVEL et R.W.T. YU : Lie Algebras and Algebraic Groups (Springer): toutes les sections sauf la dernière.
- ▶ V. KAC : Infinite dimensional Lie algebras (Cambridge University Press): section finale.
- ▶ N. BARDY-PANSE : Thèse 1993 “Systèmes de racines infinis.” : 2ème section (Un peu d'histoire).

Plan

- 1 Références
- 2 **Un peu d'histoire**
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

- ▶ Vers 1890, dans leur étude de la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, **Killing et Cartan** utilisent de façon essentielle, certaines formes linéaires (sur une "sous algèbre de Cartan" \mathfrak{h} d'une telle algèbre \mathfrak{g}) qu'ils nomment **racines** (parce qu'elles apparaissent comme les racines de $\det(ad_{\mathfrak{g}}x - T)$ considérées comme des fonctions de $x \in \mathfrak{h}$).
- ▶ La classification des algèbres de Lie semi-simples complexes se ramène à celle des **systèmes de racines associés** qui elle-même se réduit à la détermination de certaines matrices à coefficients entiers (**matrices de Cartan**). Les systèmes de racines considérés pour cela, sont dits ici **de type fini et réduits**.
- ▶ La présentation de **Serre**, par générateurs et relations, permet de retrouver à partir d'une matrice de Cartan, l'algèbre de Lie semi-simple complexe correspondante.

- ▶ L'étude des systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples réelles a fait apparaître les systèmes de racines **de type fini non réduits** c'est-à-dire dans lesquels pour certaines racines α , 2α est encore une racine.
- ▶ **Kac et Moody** introduisent indépendamment en 1968 de nouvelles algèbres, dites maintenant de Kac-Moody, qui constituent une généralisation des algèbres semi-simples en dimension infinie; pour l'étude de ces algèbres va apparaître une nouvelle notion de racine : les racines **imaginaires**.
- ▶ La construction de l'algèbre de Kac-Moody est une généralisation de la construction de Serre à partir des générateurs de **Chevalley**. La matrice est à présent supposée **de Cartan généralisée**.

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 **Premières définitions.**
 - système de racines (de type fini)
 - coracines, rang d'un système de racines et système réduit
 - système de racines de type A
 - racines d'une algèbre de Lie semi-simple déployée
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Système de racines (de type fini).

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Soit $R \subset V$. On dit que R est **un système de racines dans V** lorsque :

- ▶ R est **fini**, ne contient pas 0 et engendre V .
- ▶ Pour tout $\alpha \in R$, il existe $\alpha^\vee \in V^*$ tel que $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$ et la réflexion s_α laisse stable R : $s_\alpha(R) \subset R$ (et même en fait $s_\alpha(R) = R$) avec s_α définie par :

$$\forall x \in V, \quad s_\alpha(x) = x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha.$$

- ▶ Pour tout $\alpha \in R$, $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$.

Coracines, rang d'un système de racines et système réduit.

Définition

Soit R un système de racines dans V . Pour tout $\alpha \in R$, α^\vee est unique et s'appelle la **coracine** associée à la **racine** α . De plus $\dim V$ s'appelle le **rang du système** R .

Remarque

Soit R un système de racines dans V et soit $\alpha \in R$. Alors $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ donc $R = -R$. De plus $(-\alpha)^\vee = -\alpha^\vee$, mais si $\alpha, \beta \in R$ sont tels que $\alpha + \beta \in R$, alors on a $(\alpha + \beta)^\vee \neq \alpha^\vee + \beta^\vee$ en général.

Définition

Soit R un système de racines dans V . On dit que R est **réduit** si, pour tout $\alpha \in R$, les seules racines proportionnelles à α sont α et $-\alpha$.

Exemple

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) := \{M \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ muni du crochet de Lie $[M, N] = MN - NM$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ muni de ce crochet est une algèbre de Lie.

Soit $\hat{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{gl}_n$ le sous-espace des matrices diagonales et $\mathfrak{h} = \hat{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{sl}_n$. On note $(\hat{\varepsilon}_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \hat{\mathfrak{h}}^*$ la base duale de la base $(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ de $\hat{\mathfrak{h}}$ et $\varepsilon_i := \hat{\varepsilon}_i|_{\mathfrak{h}}$.

Alors

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

est un système de racines dans \mathfrak{h}^* (de rang $n - 1$).

Ce système de racines est dit *de type A_{n-1}* .

Vérification que R est un système de racines.

Preuve

Montrons que $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ est bien un système de racines dans \mathfrak{h}^* .

- ▶ R est fini, ne contient pas 0 et engendre \mathfrak{h}^* : en effet on a $\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{sl}_n \oplus \mathbb{k}Id$ donc $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{k}Id$ et

$$\{\varphi \in \hat{\mathfrak{h}}^* \mid \varphi(Id) = 0\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{\varepsilon}_i \mid \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\} \simeq \mathfrak{h}^*$$

par restriction à \mathfrak{h} .

- ▶ Pour $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in R$, on pose $\alpha^\vee = E_{ii} - E_{jj} \in \mathfrak{h}$. Alors $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. De plus $\alpha^\vee(R) \subset \mathbb{Z}$ (facile à vérifier).

- ▶ Soit $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in R$ et $x = \varepsilon_k - \varepsilon_\ell \in R$, avec $1 \leq i \neq j \leq n$ et $1 \leq k \neq \ell \leq n$, alors

$$s_\alpha(x) = \varepsilon_k - \varepsilon_\ell - \langle \varepsilon_k - \varepsilon_\ell, E_{ii} - E_{jj} \rangle \alpha.$$

- ▶ Si $\{k, \ell\} \cap \{i, j\} = \emptyset$ alors $s_\alpha(x) = x \in R$.
- ▶ Si $k = i$ et $\ell \neq j$ alors $s_\alpha(x) = x - \alpha = \varepsilon_j - \varepsilon_\ell \in R$.
- ▶ Si $k = j$ et $\ell \neq i$ alors $s_\alpha(x) = x + \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_\ell \in R$.
- ▶ De même pour $\ell = i$ et $k \neq j$ ou $\ell = j$ et $k \neq i$.
- ▶ Si $k = i$ et $\ell = j$ alors $s_\alpha(x) = x - 2\alpha = \alpha - 2\alpha = -\alpha \in R$.
- ▶ Si $k = j$ et $\ell = i$ alors $s_\alpha(x) = x + 2\alpha = -\alpha + 2\alpha = \alpha \in R$.

On a donc bien

$$s_\alpha(R) \subset R$$

ce qui termine la preuve. □

Racines d'une algèbre de Lie semi-simple déployée.

Définition

- ▶ Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{C} , munie du crochet de Lie $[x, y]$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on note $\text{ad } x$ ou $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ l'application $y \in \mathfrak{g} \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$.
- ▶ L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite **semi-simple** si sa **forme de Killing** $K : (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \text{Tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$ est non dégénérée. Elle est dite **déployée** lorsqu'elle possède en plus une **sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} déployante** (ie une sous-algèbre de Lie commutative maximale de \mathfrak{g} telle que, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}} x$ est diagonalisable).

Exemple

- ▶ On continue avec l'exemple de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Alors pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, $K(x, y) = 2n \text{Tr}(xy)$, qui est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur \mathfrak{g} . Donc \mathfrak{g} est semi-simple.
- ▶ Pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$ et pour tous $h, h' \in \mathfrak{h}$,
$$(\text{ad } h)(h') = [h, h'] = 0 \text{ et } (\text{ad } h)(E_{ij}) = [h, E_{ij}] = \langle \varepsilon_i - \varepsilon_j, h \rangle E_{ij},$$

donc la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} est déployante.

Exemple (Suite)

- ▶ Les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, pour $1 \leq i \neq j \leq n$, sont aussi appelées les **racines de l'algèbre de Lie semi-simple** \mathfrak{sl}_n relativement à la sous-algèbre de Cartan déployante \mathfrak{h} .
- ▶ Posons $e_i := E_{i, i+1}$, $f_i := E_{i+1, i}$, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ et $\alpha_i^\vee = E_{ii} - E_{i+1, i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.
- ▶ Alors $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ et le vecteur e_i , resp. f_i , est dit **de poids** α_i , resp. $-\alpha_i$.
- ▶ Les vecteurs e_i , f_i sont appelés **générateurs de Chevalley** de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.
- ▶ Soit \mathfrak{n}^+ la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les e_i , et \mathfrak{n}^- la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les f_i , alors on a la **décomposition triangulaire** suivante de \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-.$$

Exemple (Suite)

- ▶ Soit $\pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$. C'est une **base** du système de racines R : toute racine s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients entiers (tous positifs ou tous négatifs) des α_i . On pose $R^+ = R \cap \mathbb{N}\pi$ et $R^- = R \cap (-\mathbb{N}\pi)$. Alors $R = R^+ \sqcup R^-$. R^\pm est l'ensemble des **racines positives**, resp. **des racines négatives** et π est l'ensemble des **racines simples** de l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_n .
- ▶ Pour tout $\alpha \in \pi$, posons e_α le vecteur de \mathfrak{g} (à un scalaire multiplicatif non nul près) de poids α et pour tous $\alpha, \beta \in \pi$, $\alpha \neq \beta$, posons $m_{\alpha, \beta} = 1 - \langle \alpha^\vee, \beta \rangle$. Alors $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{N}^*$.
- ▶ On a **les relations de Serre** : pour tous $\alpha, \beta \in \pi$, $\alpha \neq \beta$,

$$(\operatorname{ad} e_\alpha)^{m_{\alpha, \beta}}(e_\beta) = 0 \quad \text{et} \quad (\operatorname{ad} f_\alpha)^{m_{\alpha, \beta}}(f_\beta) = 0.$$

- ▶ L'algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie engendrée par ses générateurs de Chevalley e_i, f_i , $1 \leq i \leq \dim \mathfrak{h}$, soumis dans \mathfrak{n}^+ , resp. \mathfrak{n}^- , aux seules relations de Serre ci-dessus, et par la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} .

Exemple (Suite)

- ▶ En fait, pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, $m_{\alpha, \beta} = 1$ ou 2 :
posons $\alpha = \alpha_i$ et $\beta = \alpha_j$, $i \neq j$.

$$\begin{cases} m_{\alpha, \beta} = 1 & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ m_{\alpha, \beta} = 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

autrement dit : si $|i - j| \geq 2$, on a

$$[e_i, e_j] = 0 \text{ et } [f_i, f_j] = 0$$

et sinon

$$(\text{ad } e_i)^2(e_{i\pm 1}) = 0 \text{ et } (\text{ad } f_i)^2(f_{i\pm 1}) = 0.$$

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 **Groupe de Weyl $W(R)$**
 - définition et propriétés
 - groupe de Weyl en type A
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Définition

Soit $R \subset V$ un système de racines dans V . Le sous-groupe des automorphismes de V engendré par les réflexions s_α ($\alpha \in R$) s'appelle *le groupe de Weyl de R* et se note $W(R)$ ou simplement W .

Remarque

Comme pour tout $\alpha \in R$, $s_\alpha|_R$ est une permutation de R , et que R est fini et engendre V , on a que $W(R)$ est un sous-groupe *fini* de $GL(V)$.

Exemple (Système de type A_{n-1})

Le groupe de Weyl du système de racines de type A_{n-1} est *isomorphe au groupe symétrique* \mathfrak{S}_n .

Preuve

► Soit

$$\begin{aligned}\varphi & : \text{GL}(\mathfrak{h}^*) \longrightarrow \text{GL}(\hat{\mathfrak{h}}^*) \\ g & \mapsto \varphi(g)\end{aligned}$$

avec $\varphi(g)(\hat{\varepsilon}_1 + \dots + \hat{\varepsilon}_n) = \hat{\varepsilon}_1 + \dots + \hat{\varepsilon}_n$ et $\varphi(g)(\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_j) = g(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$. Alors φ est un morphisme injectif de groupes.

- De plus si $X = \{\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n\} \subset \hat{\mathfrak{h}}^*$ alors pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$, on a $\varphi(s_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}) = s_{\hat{\varepsilon}_i - \hat{\varepsilon}_j}$ qui est la réflexion de $\hat{\mathfrak{h}}^*$ qui échange $\hat{\varepsilon}_i$ et $\hat{\varepsilon}_j$ et laisse fixes tous les autres $\hat{\varepsilon}_k$.
- Alors $\varphi \mid W(R)$ est un isomorphisme de $W(R)$ dans le groupe symétrique \mathfrak{S}_X de X . □

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 **Système de racines inverse et système de racines irréductible**
 - système de racines inverse
 - système de racines irréductible
 - produit scalaire invariant par $W(R)$
 - système de racines de type BC
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Proposition

Soit $R \subset V$ un système de racines dans V . Soit $(x | y)$ une forme bilinéaire symétrique sur V , non dégénérée, positive, invariante par $W(R)$, ie pour tout $w \in W(R)$, $(w(x) | w(y)) = (x | y)$.

Alors si $\alpha \in R$, α est non isotrope (ie $(\alpha | \alpha) \neq 0$) et pour tout $x \in V$,

$$s_\alpha(x) = x - 2 \frac{(x | \alpha)}{(\alpha | \alpha)} \alpha.$$

En identifiant V^* avec V par cette forme, on a donc

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha | \alpha)}.$$

Alors l'ensemble $R^\vee := \{\alpha^\vee\}_{\alpha \in R}$ est un système de racines dans V^* et, pour tout $\alpha \in R$,

$$\alpha^{\vee\vee} = \alpha.$$

Système de racines inverse et système de racines de type B ou C.

Définition

R^\vee s'appelle le *système de racines inverse* de R .

Exemple

- ▶ Pour un système de racines de type A, on a $R^\vee = R$.
- ▶ Soit $n \geq 2$. Un système de racines R dans \mathbb{R}^n est dit *de type B_n* si $R = \{\pm\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}$.
- ▶ Soit $n \geq 2$. Un système de racines R dans \mathbb{R}^n est dit *de type C_n* si $R = \{\pm 2\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}$.
- ▶ Si R est de type B_n alors R^\vee est de type C_n .

Conservation du système de racines inverse par le groupe de Weyl.

Proposition

Par transport de structure $W(R)$ opère dans V^ et conserve R^\vee .*

Définition

Un système de racines R dans V est **irréductible** si $R \neq \emptyset$ et si R n'est pas la somme directe de systèmes de racines non vides.

Autrement dit $R \subset V$ n'est pas irréductible si l'on peut écrire $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ avec R_i un système de racines non vide de V_i sous-espace de V tel que $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ et $|I| \geq 2$. Dans ce cas, si $(x | y)$ est une forme bilinéaire sur V symétrique non dégénérée, positive, invariante par $W(R)$, alors les sous-espaces V_i et V_j avec $i \neq j$ sont deux à deux orthogonaux pour cette forme.

Proposition

Le système de racines R dans V est irréductible si, et seulement si, V est un $W(R)$ -module simple.

Définition

Une algèbre de Lie (de dimension finie) \mathfrak{g} est dite *simple* si $\dim \mathfrak{g} > 1$ et ses seuls idéaux sont $\{0\}$ et \mathfrak{g} .

Proposition

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple déployée. Alors \mathfrak{g} est simple si et seulement si son système de racines (relativement à une sous-algèbre de Cartan déployante \mathfrak{h}) est irréductible.

Exemple

Par exemple soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ muni de la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} formée de ses matrices diagonales. Alors \mathfrak{g} est semi-simple déployée et comme son système de racines $R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ est irréductible, en fait \mathfrak{g} est simple.

Proposition

Soit $R \subset V$ un système de racines dans V . Pour tous $x, y \in V$, posons $(x | y) = \sum_{\alpha \in R} \langle \alpha^\vee, x \rangle \langle \alpha^\vee, y \rangle$. Alors $(x | y)$ est un produit scalaire sur V , invariant par $W(R)$.

Tous les produits scalaires invariants par $W(R)$ sont proportionnels, si R est irréductible. On peut alors définir les notions de **longueur de racines ou d'angles entre deux racines** (cet angle ne dépend pas du produit scalaire considéré, et il en est de même du rapport des longueurs de deux racines).

Proposition

Pour tout entier $n \geq 2$, il existe, à isomorphisme près, un unique système de racines irréductible non réduit R_1 de rang n obtenu de la façon suivante : soit R un système de racines de type B_n et A l'ensemble des racines de plus petite longueur de R : alors $R_1 = R \cup 2A$.

Donc

$$R_1 = \{\pm\varepsilon_i, \pm 2\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n, \pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\}.$$

On dit que R_1 est de type BC_n .

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
 - relation entre deux racines
 - systèmes de racines de rang 2
 - base d'un système de racines
 - chambres de Weyl
 - poids fondamentaux
 - plus grande racine
 - chambres de Weyl fondamentales en rang deux
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Notation

Soit $R \subset V$ un système de racines du \mathbb{R} -espace vectoriel V muni d'un produit scalaire $(x | y)$ invariant par $W(R)$. Pour tous $\alpha, \beta \in R$, on pose $a_{\alpha, \beta} = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$. Alors

$$a_{\alpha, \beta} = 2 \frac{(\beta | \alpha)}{(\beta | \beta)} \quad \text{donc} \quad a_{\alpha, \beta} a_{\beta, \alpha} = 4 \cos^2(\widehat{\alpha, \beta}) \leq 4.$$

De plus $a_{\alpha, \beta} a_{\beta, \alpha} \in \mathbb{Z}$. Donc, si on suppose que $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, les différentes possibilités sont listées dans la table ci-dessous.

On note $\theta_{\alpha, \beta} = \widehat{\alpha, \beta}$ l'angle entre α et β et $\omega_{\alpha, \beta}$ l'ordre de $s_\alpha \circ s_\beta$.

Table des différentes possibilités.

$a_{\alpha, \beta}$	$a_{\beta, \alpha}$	$\theta_{\alpha, \beta}$	$\ \beta\ ^2/\ \alpha\ ^2$	
0	0	$\pi/2$	indéterminée	$\omega_{\alpha, \beta} = 2$
1	1	$\pi/3$	1	$\omega_{\alpha, \beta} = 3$
-1	-1	$2\pi/3$	1	$\omega_{\alpha, \beta} = 3$
1	2	$\pi/4$	2	$\omega_{\alpha, \beta} = 4$
-1	-2	$3\pi/4$	2	$\omega_{\alpha, \beta} = 4$
1	3	$\pi/6$	3	$\omega_{\alpha, \beta} = 6$
-1	-3	$5\pi/6$	3	$\omega_{\alpha, \beta} = 6$
2	2	0	1	$\beta = \alpha$
-2	-2	π	1	$\beta = -\alpha$
1	4	0	4	$\beta = 2\alpha$
-1	-4	π	4	$\beta = -2\alpha$

Systèmes de racines de rang deux.

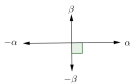


Figure: Système de type $A_1 \times A_1$: il n'est pas irréductible.

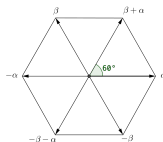


Figure: Système de type A_2

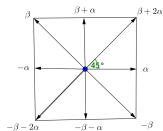


Figure: Système de type B_2 .

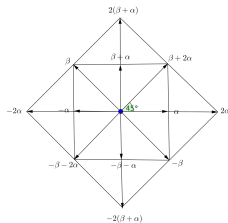


Figure: Système de type BC_2 : ce système est irréductible, non réduit.

Systèmes de racines de rang deux (suite).

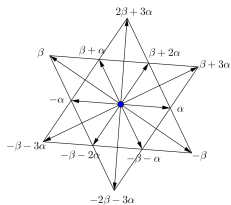


Figure: Système de type G_2

Définition

- ▶ Soit $R \subset V$ un système de racines dans le \mathbb{R} -espace vectoriel V . On choisit une base (e_1, \dots, e_n) de V et on définit l'ordre *lexicographique* relativement à cette base en écrivant que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \prec \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ si et seulement s'il existe r , tel que pour tout $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i = \mu_i$ et $\lambda_{r+1} < \mu_{r+1}$. Cet ordre est un ordre total dans V compatible avec l'addition.
- ▶ On pose $R^+ := \{\alpha \in R \mid \alpha \succ 0\}$, appelé l'ensemble des racines *positives* et $R^- := \{\alpha \in R \mid \alpha \prec 0\}$, appelé l'ensemble des racines *négatives*. On a $R = R^+ \sqcup R^-$.
- ▶ L'ensemble des éléments de R^+ qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux racines positives est appelé *base* de R . Les éléments de cette base sont appelés *racines simples de R* .

Proposition

On fixe B une base de racines simples de R .

- ▶ *Toute racine positive est la somme de racines simples : donc toute racine de R^+ , resp. de R^- , est une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs, resp. négatifs, d'éléments de la base B .*
- ▶ *Si α et β sont des racines simples distinctes, alors $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle \leq 0$ et $\alpha - \beta \notin R$.*
- ▶ *L'ensemble B est une base de V .*
- ▶ *Pour toute racine β de R , il existe $w \in W(R)$ et $\alpha \in B$ tels que $\beta = w(\alpha)$ (et bien sûr, pour tout $w \in W(R)$, pour tout $\alpha \in B$, on a $w(\alpha) \in R$).*
- ▶ *Le groupe de Weyl $W(R)$ est engendré par les s_α , avec $\alpha \in B$.*

Preuve

Montrons le deuxième point. Soit $\alpha, \beta \in B$, avec $\alpha \neq \beta$.

- ▶ *On suppose que $a_{\alpha, \beta} = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle > 0$. Alors d'après la table des possibilités précédente, nécessairement ou bien $\langle \beta^\vee, \alpha \rangle = 1$ et alors $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$ ou bien $\langle \alpha^\vee, \beta \rangle = 1$ et alors $\beta - \alpha = s_\alpha(\beta) \in R$.*
- ▶ *Donc dans tous les cas, $\alpha - \beta \in R$. Mais alors ou bien $\alpha - \beta \in R^+$ et dans ce cas $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$, ce qui est contraire à la définition d'une racine simple, ou bien $\beta - \alpha \in R^+$ et dans ce cas $\beta = (\beta - \alpha) + \alpha$, qui est une contradiction également. □*

Définition

Soit R un système de racines dans le \mathbb{R} -espace vectoriel V , muni de la topologie usuelle, définie par le produit scalaire $(x | y)$ invariant par $W(R)$.

- ▶ Pour tout $\alpha \in R$, on pose $P_\alpha := \ker(\alpha^\vee) = \{x \in V ; (x | \alpha) = 0\}$. Soit P l'union des hyperplans P_α , pour $\alpha \in R$: c'est un sous-ensemble fermé de V .
- ▶ Les composantes connexes de $V \setminus P$ sont des sous-ensembles ouverts de V , appelées **chambres de Weyl** de R . (Elles ne dépendent pas du produit scalaire invariant par $W(R)$ choisi sur V).

Proposition

Soit $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de R . On pose

$$C(B) := \{x \in V ; (x | \alpha_i) > 0, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

Alors $C(B)$ est une chambre de Weyl de R , appelée **chambre de Weyl fondamentale** relativement à la base B .

Définition

Les hyperplans P_{α_i} s'appellent les **murs** de la chambre de Weyl fondamentale $C(B)$.

Proposition

- ▶ L'application $B \mapsto C(B)$ est une bijection entre l'ensemble des bases de R et l'ensemble des chambres de Weyl de R .
- ▶ Le groupe $W(R)$ agit **simplement transitivement** sur l'ensemble des chambres de Weyl de R et sur l'ensemble des bases de R .
- ▶ Soit B une base de R et $C := C(B)$. Alors chaque $W(R)$ -orbite de V intersecte \overline{C} en un unique point.

Définition

Soit $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base du système de racines R dans V , \mathbb{R} -espace vectoriel muni du produit scalaire $(x | y)$ invariant par l'action de $W(R)$. Soit $B^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ la base de R^\vee obtenue en identifiant V et V^* grâce à ce produit scalaire. La base duale $(\varpi_{\alpha_1}, \dots, \varpi_{\alpha_n})$ de la base B^\vee est formée des **poids fondamentaux** de R , relativement à la base B .

Proposition

$$C(B) = \mathbb{R}_+^* \varpi_{\alpha_1} + \dots + \mathbb{R}_+^* \varpi_{\alpha_n} \text{ et } \overline{C(B)} = \mathbb{R}_+ \varpi_{\alpha_1} + \dots + \mathbb{R}_+ \varpi_{\alpha_n}$$

Proposition

Soit R un système de racines *irréductible* dans V et soit B une base de R . Alors B ne s'écrit pas comme la réunion (nécessairement disjointe) de deux sous-ensembles orthogonaux.

Preuve

Supposons le contraire et soit B_1 et B_2 deux sous-ensembles de B non vides tels que $B = B_1 \cup B_2$ et tels que toute racine de B_1 est orthogonale à toute racine de B_2 . Alors puisque $W(R)$ est engendré par les s_α , avec $\alpha \in B$, le sous-espace de V engendré par B_1 est $W(R)$ -stable et propre. Cela contredit le fait que V est un $W(R)$ -module simple. \square

Proposition

Supposons le système de racines R dans V irréductible. Soit C une chambre de Weyl de R et soit $B(C) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ la base de R correspondante.

On définit *la relation d'ordre dans V définie par C* de la façon suivante: pour $x \in V$, on dit que $x \geq 0$ si x est combinaison linéaire à coefficients positifs ou nuls (pas forcément entiers) des α_i , ou encore

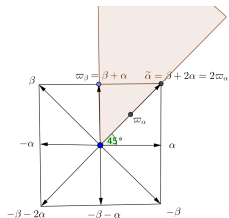
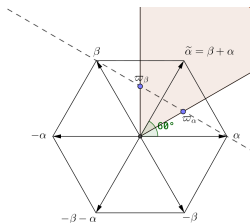
$x \geq 0 \iff (x | y) \geq 0$ pour tout $y \in C$. Cet ordre est un ordre partiel sur V , compatible avec la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de V .

- ▶ Il existe une racine $\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$ telle que, pour toute racine $\sum_{i=1}^n p_i \alpha_i$, on ait $k_1 \geq p_1, k_2 \geq p_2, \dots, k_n \geq p_n$. Autrement dit, R possède un plus grand élément $\tilde{\alpha}$ pour la relation d'ordre définie par C . La racine $\tilde{\alpha}$ s'appelle *la plus grande racine de R , relativement à C* .
- ▶ On a $\tilde{\alpha} \in \bar{C}$ ie $(\tilde{\alpha} | \alpha_i) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $(\tilde{\alpha} | \tilde{\alpha}) \geq (\beta | \beta)$ pour toute racine β de R .

Preuve

- ▶ Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i$ et $\beta = \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i$ deux racines maximales pour l'ordre défini par C . On va montrer que $\alpha = \beta$ et cela montrera le premier point.
 - ▶ On montre que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $(\alpha \mid \alpha_i) \geq 0$. En effet sinon $(\alpha \mid \alpha_i) < 0$ pour un indice i . Mais alors ou bien $\alpha = -\alpha_i$, ou bien $\alpha + \alpha_i \in R$ (d'après les différentes possibilités de la liste, puisque si $\alpha \neq -\alpha_i$, on a soit $a_{\alpha, \alpha} = -1$ soit $a_{\alpha, \alpha_i} = -1$ et alors $s_{\alpha}(\alpha_i) = \alpha_i + \alpha \in R$ ou $s_{\alpha_i}(\alpha) = \alpha + \alpha_i \in R$) et dans les deux cas, cela contredit la maximalité de α .
 - ▶ Pour tout i , $k_i \geq 0$. En effet sinon comme $R = R^+ \sqcup R^-$, on aurait $\alpha \in R^-$ et donc $\alpha < 0$. Mais alors $\alpha < -\alpha$, ce qui contredit la maximalité de α .
- ▶ En fait on montre que pour tout i , $k_i > 0$. Si J est l'ensemble des i tels que $k_i > 0$ et J' son complémentaire, on a déjà $J \neq \emptyset$ (car $\alpha \neq 0$). Si $J' \neq \emptyset$, alors comme R est irréductible, $B(C)$ n'est pas la réunion de deux sous-ensembles non vides orthogonaux, donc il existe $i \in J$ et $i' \in J'$ tels que $(\alpha_i \mid \alpha_{i'}) < 0$. Mais alors on obtient $(\alpha \mid \alpha_{i'}) < 0$, ce qui contredit le premier point.
- ▶ D'après le premier point on a, pour tout i , $(\beta \mid \alpha_i) \geq 0$ et comme $\beta \neq 0$, on ne peut pas avoir $(\beta \mid \alpha_i) = 0$ pour tout i . Donc $(\beta \mid \alpha) = \sum_{i=1}^n k_i (\beta \mid \alpha_i) > 0$ d'après le point précédent. Mais alors ou bien $\alpha = \beta$, ou bien $\alpha - \beta \in R$ (même argument que précédemment, d'après la liste des différentes possibilités), et dans ce dernier cas, on a $\alpha > \beta$ ou $\beta > \alpha$, ce qui contredit la maximalité de α et β . □

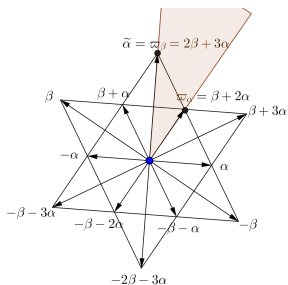
Chambres de Weyl fondamentales en types A_2 et B_2 .



En rose: la chambre de Weyl fondamentale $C(B)$ associée à la base $B = (\alpha, \beta)$ en type A_2 . En pointillés: la droite $(x | \tilde{\alpha}) = 1$ où $\tilde{\alpha} = \alpha + \beta$ est la plus grande racine du système. A l'intersection des murs de $C(B)$ et de la droite en pointillés: les poids fondamentaux ϖ_α et ϖ_β .

En rose: chambre de Weyl $C(B)$ associée à la base $B = (\beta, \alpha)$ en type B_2 . Sont aussi représentés: les poids fondamentaux ϖ_β et ϖ_α , ainsi que la plus grande racine $\tilde{\alpha} = 2\varpi_\alpha = \beta + 2\alpha$.

Chambre de Weyl fondamentale en type G_2 .



En rose: chambre de Weyl $C(\mathcal{B})$ associée à la base $\mathcal{B} = (\alpha, \beta)$ en type G_2 . Sont aussi représentés: les poids fondamentaux ϖ_α et ϖ_β , ainsi que la plus grande racine $\tilde{\alpha} = 3\alpha + 2\beta = \varpi_\beta$.

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 **Classification des systèmes de racines**
 - matrice de Cartan
 - diagramme (ou graphe) de Dynkin
 - les matrices de Cartan dans les différents types
- 8 Systèmes de racines non de type fini.

Définition

- ▶ Soit $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base du système de racines R . La **matrice de Cartan** de R (relativement à la base B) est la matrice $(a_{\alpha_i, \alpha_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_{\alpha_i, \alpha_j} = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle = 2 \frac{(\alpha_j | \alpha_i)}{(\alpha_j | \alpha_j)}$.
- ▶ Deux systèmes de racines R , resp. R' dans V , resp. V' , sont dits **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $F : V \rightarrow V'$ tel que $F(R) = R'$ et tel que, pour tous $\alpha, \beta \in R$, $\langle F(\beta)^\vee, F(\alpha) \rangle = \langle \beta^\vee, \alpha \rangle$.

Proposition

- ▶ La matrice de Cartan d'un système de racines détermine ce système de racines à isomorphisme près.
- ▶ Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de Cartan de R relativement à la base $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et si $\varpi_i, 1 \leq i \leq n$, sont les poids fondamentaux relativement à cette base, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varpi_j.$$

Diagramme (ou graphe) de Dynkin.

Définition

A chaque système de racines R dans V , on associe un graphe normé $\Gamma(R) = (X, f)$, appelé **diagramme, ou graphe, de Dynkin** de R comme suit :

- ▶ on fixe une base $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ de R et pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on pose $n_{ij} = a_{\alpha_i, \alpha_j} = \langle \alpha_j^\vee, \alpha_i \rangle$.
- ▶ Les sommets du graphe X sont $\{1, 2, \dots, n\}$ (ou $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$) et $\{i, j\}$ est une arête si $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle \neq 0$ (ou $n_{ij} \neq 0$ ou $n_{ji} \neq 0$).
- ▶ Lorsque $\{i, j\}$ est une arête, on pose

$$f(i, j) = \frac{n_{ij}}{n_{ji}} = \frac{\|\alpha_i\|^2}{\|\alpha_j\|^2}.$$

Si θ_{ij} est l'angle entre α_i et α_j , les seules possibilités que l'on peut avoir, à permutation près de i et j (d'après le tableau des possibilités et d'après la propriété selon laquelle $n_{ij} \leq 0$) sont les suivantes :

- ▶ i et j non liés cad $n_{ij} = n_{ji} = 0$ et $\theta_{ij} = \pi/2$.
- ▶ $f(i, j) = f(j, i) = 1$ cad $n_{ij} = n_{ji} = -1$, $\|\alpha_i\| = \|\alpha_j\|$ et $\theta_{ij} = 2\pi/3$.
- ▶ $f(i, j) = 2$ et $f(j, i) = 1/2$ cad $n_{ij} = -2$, $n_{ji} = -1$, $\|\alpha_i\| = \sqrt{2}\|\alpha_j\|$ et $\theta_{ij} = 3\pi/4$.
- ▶ $f(i, j) = 3$, $f(j, i) = 1/3$ cad $n_{ij} = -3$, $n_{ji} = -1$, $\|\alpha_i\| = \sqrt{3}\|\alpha_j\|$ et $\theta_{ij} = 5\pi/6$.

Pour les deux derniers cas, on place deux traits, resp. trois traits, entre i et j (lorsque $f(i, j) = 2$, resp. $f(i, j) = 3$) ainsi qu'une flèche $>$ sur ces traits joignant i à j pour indiquer que α_i est une racine longue alors que α_j est une racine courte.

Ainsi le diagramme de Dynkin $\Gamma(R)$ détermine R à isomorphisme près.

Proposition

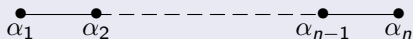
Soit R un système de racines dans V et $\Gamma(R)$ son diagramme de Dynkin. Alors R est irréductible si, et seulement si, $\Gamma(R)$ est connexe.

Graphes de Dynkin des systèmes de racines réduits et irréductibles.

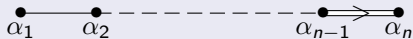
Théorème

Soit R un système de racines irréductible et réduit. Alors son graphe de Dynkin est isomorphe à l'un des graphes représentés par les figures suivantes :

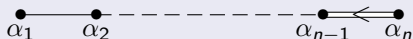
Graphes de Dynkin (types classiques)



Type A_n , $n \geq 1$



Type B_n , $n \geq 2$



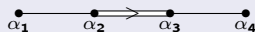
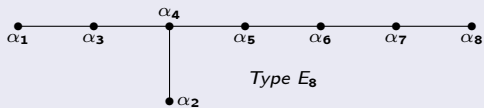
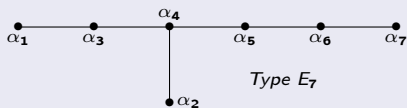
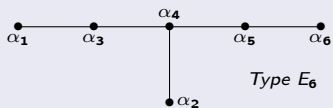
Type C_n , $n \geq 3$



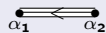
Type D_n , $n \geq 4$

Types exceptionnels.

Graphes de Dynkin (types exceptionnels)



Type F_4



Type G_2

Théorème

Tous les graphes de Dynkin ci-dessus (types classiques ou exceptionnels) sont deux à deux non isomorphes et pour chacun d'eux, il existe un système de racines irréductible et réduit l'admettant (à un isomorphisme près) comme graphe de Dynkin.

Matrices de Cartan dans les différents types.

Soit R un système de racines irréductible, réduit et $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base de R . Rappelons que la matrice de Cartan de R relativement à B est la matrice $(\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Matrice de Cartan en type A_n :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Cartan en type C_n :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Cartan en type B_n :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Cartan en type D_n :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices de Cartan en types E.

Matrice de Cartan en type E_6 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Cartan en type E_7 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de Cartan en type E_8 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices de Cartan en types F et G.

- ▶ Matrice de Cartan en type F_4 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Matrice de Cartan en type G_2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Plan

- 1 Références
- 2 Un peu d'histoire
- 3 Premières définitions.
- 4 Groupe de Weyl $W(R)$
- 5 Système de racines inverse et système de racines irréductible
- 6 Relation entre deux racines, bases et chambres de Weyl.
- 7 Classification des systèmes de racines
- 8 Systèmes de racines non de type fini.
 - matrice de Cartan généralisée
 - les différents types
 - diagramme de Dynkin
 - exemples
 - racines

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ est dite *de Cartan généralisée* lorsque :

- ▶ $a_{ii} = 2$ pour tout $1 \leq i \leq n$;
- ▶ $-a_{ij} \in \mathbb{N}$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$;
- ▶ $a_{ij} = 0 \implies a_{ji} = 0$.

On dit de plus que la matrice de Cartan généralisée A est *décomposable* lorsque, après permutation des lignes et la même permutation des colonnes de A , la matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ avec A_1 et A_2 des matrices de Cartan généralisées. On dit que A est *indécomposable* si elle n'est pas décomposable.

Exemple

Les matrices de Cartan des systèmes de racines irréductibles, réduits sont des matrices de Cartan généralisées. De plus elles vérifient la propriété suivante : elles sont indécomposables et pour chacune d'entre elles, tous les mineurs principaux sont strictement positifs.

Définition

Soit A une matrice de Cartan généralisée indécomposable. On dit que la matrice A est

- ▶ *de type fini* si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
- ▶ *de type affine* si tous ses mineurs principaux propres sont strictement positifs et $\det A = 0$.
- ▶ *de type indéfini* si A n'est ni de type fini, ni de type affine.

Diagramme de Dynkin associé à une matrice de Cartan généralisée.

Définition

- ▶ Si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ est une matrice de Cartan généralisée, on lui associe un **diagramme de Dynkin** $S(A)$ de la façon suivante : pour $1 \leq i \neq j \leq n$,
 - ▶ si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ et $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$ les sommets i et j sont connectés par $|a_{ij}|$ traits et ces traits sont munis d'une flèche qui pointe vers i si $|a_{ij}| > 1$,
 - ▶ si $a_{ij}a_{ji} > 4$, les sommets i et j sont connectés par un trait dessiné en gras surmonté d'une paire ordonnée d'entiers $|a_{ij}|, |a_{ji}|$.

Remarques

- ▶ A est indécomposable si, et seulement si, $S(A)$ est connexe. La matrice A est déterminée par son diagramme de Dynkin $S(A)$ et une énumération de ses sommets. On dit que $S(A)$ est de type fini, affine ou indéfini, lorsque A est de l'un de ces types.
- ▶ Dans la convention de Kac, on verra un peu plus loin que $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$ où les α_i^\vee , resp. α_j , sont les coracines simples, resp. racines simples et que l'on peut aussi définir une longueur pour les racines simples. Donc si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ et $|a_{ij}| > 1$ alors $\|\alpha_j\| \geq \|\alpha_i\|$, donc la flèche qui pointe vers i signifie comme dans le cas de type fini que la longueur de la racine α_j est plus grande ou égale à celle de la racine α_i ; mais contrairement au type fini, quand $|a_{ij}| > 1$, il se peut que $\|\alpha_j\| = \|\alpha_i\|$ (lorsque $|a_{ij}| = |a_{ji}| = 2$) et dans ce cas on doit faire apparaître une flèche dans les deux sens.

Type hyperbolique.

Proposition

Soit A une matrice de Cartan généralisée indécomposable. Si A est de type fini ou affine, alors chaque sous-diagramme propre de $S(A)$ est une union de diagrammes de Dynkin (connexes) de type fini.

Définition

*Soit A une matrice de Cartan généralisée indécomposable. La matrice A est dite de type **strictement hyperbolique** (resp. **hyperbolique**) lorsque A est de type indéfini et que les sous-diagrammes connexes propres de $S(A)$ sont de type fini (resp. de type fini ou affine).*

Autres exemples de matrices de Cartan généralisées.

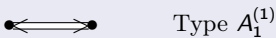
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$.

- ▶ Si $ab \leq 3$ alors A est une matrice de Cartan (généralisée) de type fini : de type A_2 si $a = b = 1$, de type $B_2 = C_2$ si $\{a, b\} = \{1, 2\}$, de type G_2 si $\{a, b\} = \{1, 3\}$.

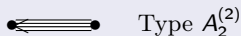
- ▶ Si $ab = 4$ alors A est une matrice de Cartan généralisée de type affine.

Deux cas sont alors possibles:

- ▶ Ou bien $a = b = 2$ et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant:



- ▶ Ou bien $\{a, b\} = \{1, 4\}$ et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :



- ▶ Si $ab > 4$ alors A est une matrice de Cartan généralisée de type indéfini et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :

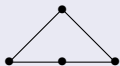


Donc A est de type strictement hyperbolique.

D'autres exemples de matrices de Cartan généralisées.

►
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

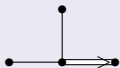
La matrice A est de type affine et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :



Type $A_3^{(1)}$

►
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

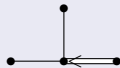
La matrice A est de type affine (attention, ici cette matrice de Cartan généralisée est la transposée de la matrice de Cartan écrite avec la convention de Bourbaki) et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :



Type $B_3^{(1)}$

►
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

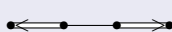
La matrice A est de type affine et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :



Type $A_5^{(2)}$

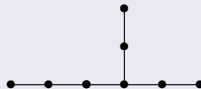
►
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A est de type affine et son diagramme de Dynkin $S(A)$ est le suivant :



Type $D_4^{(2)}$

► Soit le diagramme de Dynkin suivant :



On peut déterminer la matrice de Cartan A associée et vérifier que A est de type hyperbolique.

Définition

- ▶ Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de Cartan généralisée, de rang ℓ .

Une **réalisation** de A est un triplet $(\mathfrak{h}, \pi, \pi^\vee)$ tel que

- ▶ \mathfrak{h} est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n - \ell$,
- ▶ $\pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ et $\pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ sont des familles libres,
- ▶ $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.
- ▶ Les α_i sont appelés les **racines simples** et les α_i^\vee les **coracines simples**.

On construit une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}(A)$, dite **de Kac-Moody**, qui est engendrée comme algèbre de Lie par \mathfrak{h} et par les éléments $e_i, f_i, 1 \leq i \leq n$, soumis aux seules relations suivantes:

- ▶ $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$,
- ▶ $[h, h'] = 0$ pour tous $h, h' \in \mathfrak{h}$,
- ▶ $[h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i$,
- ▶ $[h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$, et pour tout $h \in \mathfrak{h}$,
- ▶ $(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$ et $(\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0$ pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$.

Définition

On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ pour A une matrice de Cartan généralisée.

- ▶ On dira que \mathfrak{g} est de type fini, resp. de type affine, resp. de type indéfini, lorsque A est de l'un de ces types.
- ▶ On pose $Q = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$: c'est le **réseau des racines** de \mathfrak{g} . On pose $Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{N}\alpha_i$ et pour tout $\alpha \in Q$, on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, x] = \alpha(h)x\}.$$

Alors

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha = \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in Q_+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^+} \oplus \mathfrak{h} \oplus \underbrace{\bigoplus_{-\alpha \in Q_+} \mathfrak{g}_\alpha}_{\mathfrak{n}^-}$$

avec $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

- ▶ Un élément $\alpha \in Q$ est appelé **racine** de \mathfrak{g} lorsque $\alpha \neq 0$ et $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$. On note R l'ensemble des racines de \mathfrak{g} .
- ▶ On pose $R^+ = R \cap Q_+$ et $R^- = R \cap (-Q_+)$. Les éléments de R^+ , resp. R^- , sont appelés **racines positives**, resp. **négatives**. On a alors

$$R = R^+ \sqcup R^-.$$

Remarque

- ▶ Pour tout $\alpha \in Q$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha < \infty$, mais on n'a pas forcément, si $\alpha \neq 0$, $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ comme dans le cas de type fini.
- ▶ De plus, contrairement au cas de type fini, dès que \mathfrak{g} n'est pas de type fini, on a $\dim \mathfrak{g} = \infty$ et si R est l'ensemble des racines de \mathfrak{g} , on a $|R| = \infty$.

Définition

Soit A une matrice de Cartan généralisée et $\mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac-Moody associée.

- ▶ Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit la **réflexion fondamentale** s_i associée à la racine simple α_i comme suit:

$$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$$

pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

- ▶ Le **groupe de Weyl** W , ou $W(A)$, de $\mathfrak{g}(A)$ est le sous-groupe de $GL(\mathfrak{h}^*)$ engendré par toutes les réflexions fondamentales s_i , $1 \leq i \leq n$.
- ▶ Une racine $\alpha \in Q$ est dite **réelle** lorsqu'il existe $w \in W(A)$ et $\alpha_i \in \pi$ tels que $\alpha = w(\alpha_i)$. Elle est dite **imaginaire** sinon.

Proposition

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$ une matrice de Cartan généralisée et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ l'algèbre de Kac-Moody associée.

- ▶ On a

$$|R| < \infty \iff |W(A)| < \infty.$$

- ▶ Pour toute racine réelle α , $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
- ▶ Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est de type fini, alors l'ensemble des racines imaginaires de \mathfrak{g} est vide (et \mathfrak{g} est semi-simple déployée).

- ▶ Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ est de type affine (avec A de rang ℓ) alors $n = \ell + 1$. De plus, en renumérotant les indices des α_i de 0 à ℓ , il existe une racine imaginaire $\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i$ avec les a_i des entiers strictement positifs premiers entre eux dans leur ensemble tel que $A\delta = 0$ (en identifiant δ avec le vecteur transposé de $(a_0, a_1, \dots, a_\ell)$). Alors l'ensemble des racines imaginaires de \mathfrak{g} est

$$\{n\delta \mid n \in \mathbb{Z}^*\}.$$

- ▶ Si A est symétrisable (cad s'il existe une matrice diagonale inversible $D \in M_n(\mathbb{Q}_+)$ et une matrice symétrique $B = (b_{ij})$ telles que $A = DB$), alors on peut définir sur \mathfrak{h}^* une forme bilinéaire symétrique (\mid) non dégénérée invariante par $W(A)$ telle que pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $(\alpha_i \mid \alpha_j) = b_{ij}$. Alors $\alpha \in R$ est imaginaire si, et seulement si, $(\alpha \mid \alpha) \leq 0$.