Exposé au GTIA, 14 Juin 2021

Sections de Weierstrass pour certaines sous-algèbres paraboliques.

Florence Fauquant-Millet

Université de Lyon - Université Jean Monnet de Saint-Etienne - Institut Camille Jordan

14 Juin 2021

Motivation.

Théorème (Chevalley)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur $\mathbb{C}$ et G son groupe adjoint. On note $\mathbb{C}[\mathfrak{g}^*] \simeq S(\mathfrak{g})$ l'agèbre des fonctions polynomiales sur l'espace vectoriel dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$, qui est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.
L'algèbre d'invariants $Y(\mathfrak{g}) := \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G = S(\mathfrak{g})^G = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$, invariantes par l'action de G ou de $\mathfrak{g}$, est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{C}$ c'est-à-dire: cette algèbre est engendrée par un nombre fini de fonctions polynomiales invariantes qui sont homogènes et algébriquement indépendantes.

Exemple de $\mathfrak{gl}_n$.

- Prenons par exemple $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, l'algèbre de Lie formée de toutes les matrices complexes de taille $n \times n$ munie du crochet de Lie $[x,\, y] = xy - yx$ pour tous $x,\, y \in \mathfrak{gl}_n$ ($n \geq 2$).
  Alors $Y(\mathfrak{g})$ est l'algèbre de polynômes sur $\mathbb{C}$ engendrée par les n fonctions polynomiales F_j ($1 \leq j \leq n$) invariantes par l'action de G qui sont les suivantes:
  $F_j = \sum_{|I|=j} \Delta_I$ où Δ_I est le mineur principal correspondant à l'intervalle $I \subset [1,\, n]$ de la matrice $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ où E_{ij} et la matrice élémentaire associée à la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.
  Par exemple: $F_1 = I_n,\ F_n = \Delta$ le déterminant de la matrice $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Théorème de Chevalley.

Le théorème de Chevalley provient du résultat suivant:

- Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.
  - Par exemple si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, on peut prendre pour $\mathfrak{h}$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales, et $W = \mathfrak{S}_n$ agit sur $\mathfrak{h}$ de façon évidente.
- Alors l'application de restriction res_1

$$res_1 : \quad \begin{array}{ccc} Y(\mathfrak{g}^*) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \\ f & \longmapsto & f_{|\mathfrak{h}} \end{array}$$

  est un isomorphisme d'algèbres.
- Comme W est un sous-groupe fini de $GL(\mathfrak{h})$ engendré par des réflexions, alors $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ est une algèbre de polynômes.

Section de Kostant.

Théorème (Kostant)

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive sur $\mathbb{C}$. Alors il existe un sous-espace affine $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{g}^*$ tel que l'application de restriction

$$\begin{array}{rccc} res: & Y(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]^G & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ & f & \longmapsto & f_{|\mathcal{S}} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.
$\mathcal{S}$ est appelé la section de Kostant ou la tranche de Kostant.

$\mathfrak{sl}_2$-triplet principal.

Définition

Si $\mathfrak{g}$ est réductive, il existe un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal (x, h, y) de $\mathfrak{g}$: c'est-à-dire, $x, y \in \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ sont réguliers dans $\mathfrak{g}^*$ - la codimension de leur G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$ est minimale, égale à l'indice de $\mathfrak{g}$ - et h est semi-simple et tel que $[h, y] = -y$, et $[x, y] = h$.

La (à G-conjugaison près) section de Kostant construite par Kostant est

$$\mathcal{S} = y + \mathfrak{g}^x$$

où $\mathfrak{g}^x = \{z \in \mathfrak{g} \mid [x, z] = 0\}$ est le centralisateur de x dans $\mathfrak{g}$.

- Pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, l'élément y peut être pris égal à la matrice avec des 1 sous la diagonale principale et des zéros ailleurs. Puis x et h peuvent être choisis convenablement (avec le théorème de Jacobson-Morosov).

Propriétés de la section de Kostant.

- La section de Kostant a été construite à partir d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet principal (x, h, y): l'espace vectoriel engendré par ce triplet est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$, et $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{sl}_2$-module.
  Alors par la théorie de $\mathfrak{sl}_2$, on a que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, y] \oplus \mathfrak{g}^x$.
  On remarque que la section de Kostant $\mathcal{S} = y + \mathfrak{g}^x$ avec $\mathfrak{g}^x$ qui est un supplémentaire h-stable de l'espace tangent en y de la G-orbite de y.
- Les valeurs propres m_i $(1 \leq i \leq \mathrm{rang}\,\mathfrak{g} = \mathrm{indice}\,\mathfrak{g})$ de h sur $\mathfrak{g}^x$ sont toutes des entiers positifs ou nuls.
  En fait ce sont les exposants de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire $m_i + 1 = \deg(f_i)$ où l'ensemble $\{f_i\ ;\ 1 \leq i \leq \mathrm{rang}\,\mathfrak{g}\}$ est un ensemble de générateurs homogènes et algébriquement indépendants de l'algèbre d'invariants $Y(\mathfrak{g})$.
- $\sum_{i=1}^{\mathrm{rang}\,\mathfrak{g}} \deg(f_i) = c(\mathfrak{g}) := 1/2(\dim \mathfrak{g} + \mathrm{rang}\,\mathfrak{g})$.

Définition (Popov)

Soit $\mathfrak{a}$ *une algèbre de Lie complexe algébrique de dimension finie (non nécessairement réductive) et* A *son groupe adjoint.*
Un sous-espace affine $\mathcal{S}$ *de* $\mathfrak{a}^*$ *vérifiant la même propriété que la section de Kostant est appelé section de Weierstrass pour l'action coadjointe de* $\mathfrak{a}$*. En d'autres termes,* $\mathcal{S}$ *est une section de Weierstrass quand*

$$
\begin{array}{rrcl}
res: & Y(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]^A & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\
 & f & \longmapsto & f_{|\mathcal{S}}
\end{array}
$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Un analogue du théorème de Kostant.

Définition (Joseph-Lamprou)

Une paire adaptée pour $\mathfrak{a}$ *est une paire* $(h, y) \in \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}^*$ *telle que* h *est semi-simple,* y *est régulier dans* $\mathfrak{a}^*$ *et* $(ad^* h)(y) = -y$ *où* ad^* *désigne l'action coadjointe de* $\mathfrak{a}$ *sur* $\mathfrak{a}^*$*.*

Théorème (Joseph-Shafrir)

Supposons que

- $Y(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]^A = S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}$ *est polynomiale,*
- *il n'existe aucun semi-invariant propre dans* $\mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]$*,*
- *il existe une paire adaptée* (h, y) *pour* $\mathfrak{a}$*,*
- *il existe un sous-espace vectoriel* $V \subset \mathfrak{a}^*$*,* $ad^* h$*-stable, tel que* $(ad^* \mathfrak{a})(y) \oplus V = \mathfrak{a}^*$*.*

- Avec les hypothèses précédentes, on a

$$\dim V = \mathrm{indice}\,\mathfrak{a} = \min_{x \in \mathfrak{a}^*} \operatorname{codim} A.x = \mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}(Frac(Y(\mathfrak{a}))).$$

Théorème (Joseph-Shafrir)

Avec les hypothèses précédentes, on a:

- $y + V$ *est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de* $\mathfrak{a}$*.*
- *Les valeurs propres* m_i *de* h *sur* V *sont toutes des entiers positifs ou nuls et* $m_i + 1$ *est le degré d'un générateur homogène* f_i *de* $Y(\mathfrak{a})$*.*
- $$\sum_{i=1}^{\mathrm{indice}\,\mathfrak{a}} \deg(f_i) = c(\mathfrak{a}) := 1/2(\dim \mathfrak{a} + \mathrm{indice}\,\mathfrak{a})$$

Tranche affine.

Théorème (Joseph-FM)

Supposons que $\mathcal{S} \subset \mathfrak{a}^*$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{a}$, et qu'il n'y a pas de semi-invariant propre dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]$. Alors $\mathcal{S}$ est une tranche affine, ce qui signifie:

- $\overline{A.\mathcal{S}} = \mathfrak{a}^*$ *et*
- *toute A-orbite coadjointe dans $\mathfrak{a}^*$ rencontre $\mathcal{S}$ en au plus un point et transversalement.*

Notre but.

- Notre but est de construire des sections de Weierstrass pour certaines algèbres de Lie algébriques $\mathfrak{a}$ non réductives, pour lesquelles il n'y a pas de semi-invariant propre dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]$, c'est-à-dire que les caractères sont tous triviaux.
- L'intérêt de ne considérer que des algèbres de Lie algébriques pour lesquelles il n'y a pas de semi-invariant propre dans $\mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]$ vient d'un théorème de Chevalley-Dixmier (plus connu comme un cas particulier d'un théorème de Rosenlicht) qui dit que

$$\text{indice}\,\mathfrak{a} = \text{degtr}_{\mathbb{C}}((\mathit{Frac}\, S(\mathfrak{a}))^{\mathfrak{a}})$$

  et donc s'il n'y a pas de semi-invariant propre, comme $(\mathit{Frac}\, S(\mathfrak{a}))^{\mathfrak{a}} = \mathit{Frac}(S(\mathfrak{a})^{\mathfrak{a}}) = \mathit{Frac}(Y(\mathfrak{a}))$, on a alors

$$\text{indice}\,\mathfrak{a} = \text{degtr}_{\mathbb{C}}(\mathit{Frac}(Y(\mathfrak{a}))).$$

- Alors ces sections de Weierstrass seront aussi des tranches affines.

Quelques remarques.

Remarques

- *L'existence d'une section de Weierstrass implique la polynomialité de $Y(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}[\mathfrak{a}^*]^A$. Mais cette dernière n'est pas suffisante.*
- *Prenons $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$, une sous-algèbre nilpotente maximale de l'algèbre de Lie simple de type C_2, l'algèbre de Lie du groupe de Lie symplectique $Sp_2(\mathbb{C})$.*
  Alors $Y(\mathfrak{n})$ est polynomiale mais il n'existe aucune section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{n}$.
  En effet une section de Weierstrass donne une linéarisation des générateurs invariants de $Y(\mathfrak{a})$ et dans le cas $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}$ en type C_2, une telle linéarisation est impossible.
- *Une paire adaptée n'existe pas toujours, même si une section de Weierstrass existe, comme par exemple pour la sous-algèbre de Borel tronquée en type B.*

Notre résultat principal.

- Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_N$ de type $\mathrm{B_n},\ \mathrm{C_n},\ \mathrm{D_n}$ avec un facteur de Levi formé (de chaque côté de l'antidiagonale) par un premier et un dernier blocs et éventuellement entre eux, un ou plusieurs blocs de taille deux : cela inclut aussi les sous-algèbres paraboliques maximales, c'est-à-dire avec un facteur de Levi composé de deux blocs de chaque côté de l'antidiagonale.
- Soit $\mathfrak{p}_\Lambda$ la troncation canonique de $\mathfrak{p}$: de sorte qu'il n'y a aucun semi-invariant propre dans $\mathbb{C}[\mathfrak{p}_\Lambda^*]$ et que l'algèbre $Sy(\mathfrak{p})$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{p}^*$ semi-invariantes est égale à l'algèbre $Y(\mathfrak{p}_\Lambda)$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{p}_\Lambda^*$ qui sont invariantes.
- Dans la plupart des cas ci-dessus $\mathfrak{p}_\Lambda$ est simplement la sous-algèbre dérivée $\mathfrak{p}' = [\mathfrak{p},\ \mathfrak{p}]$ de $\mathfrak{p}$.

Théorème (Lamprou-FM et FM)

Avec les hypothèses ci-dessus, $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}_\Lambda)$ *est une algèbre de polynômes et il existe une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de* $\mathfrak{p}_\Lambda$*. De plus cette section de Weierstrass est donnée par une paire adaptée de* $\mathfrak{p}_\Lambda$*.*

Une idée de la preuve du théorème.

- La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ est associée à un sous-ensemble $\pi' \subset \pi$ de racines simples de $\mathfrak{g}$ et son système de racines est $\Delta^+ \sqcup \Delta^-_{\pi'}$.
- On a alors
$$\mathfrak{p}_\Lambda = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}_\Lambda \oplus \mathfrak{n}^-_{\pi'}$$
et
$$\mathfrak{p}^-_\Lambda = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}_\Lambda \oplus \mathfrak{n}^+_{\pi'} \simeq \mathfrak{p}^*_\Lambda$$
grâce à la forme de Killing K de $\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{h}_\Lambda \subset \mathfrak{h}$.
- Le facteur de Levi de $\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-_{\pi'}$ et son algèbre dérivée (qui est semi-simple) est $\mathfrak{r}' = \mathfrak{n}_{\pi'} \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}^-_{\pi'}$ où $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap [\mathfrak{p},\, \mathfrak{p}] = \bigoplus_{\alpha \in \pi'} \mathbb{C}\alpha^\vee$. On a toujours $\mathfrak{h}_\Lambda \supset \mathfrak{h}'$.
- Pour tout sous-ensemble A de l'ensemble des racines Δ de $(\mathfrak{g},\, \mathfrak{h})$, on note $\mathfrak{g}_A = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbb{C}x_\alpha$ où x_α est un vecteur non nul choisi dans le sous-espace radiciel correspondant à la racine α.

On utilise la Proposition suivante:

Proposition

Soit S et T des sous-ensembles disjoints de $\Delta^- \sqcup \Delta^+_{\pi'}$, tels que:

- $S_{|\mathfrak{h}_\Lambda}$ *est une base de* $\mathfrak{h}^*_\Lambda$.
- *Soit T' le complémentaire de $T \sqcup S$ dans $\Delta^- \sqcup \Delta^+_{\pi'}$ et $y = \sum_{\gamma \in S} x_\gamma$. Soit $\Phi_y : (x, x') \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto K(y, [x, x'])$. On suppose $\Phi_{y|_{\mathfrak{g}_{-T'} \times \mathfrak{g}_{-T'}}}$ non dégénérée.*
- $|T| = \mathrm{indice}\, \mathfrak{p}_\Lambda$.

Alors y est régulier dans $\mathfrak{p}^*_\Lambda$ et

$$(ad^* \mathfrak{p}_\Lambda)(y) \oplus \mathfrak{g}_T = \mathfrak{p}^*_\Lambda.$$

De plus il existe un unique $h \in \mathfrak{h}_\Lambda$ tel que $\langle h, \gamma \rangle = -1$ pour tout $\gamma \in S$ et donc (h, y) est une paire adaptée pour $\mathfrak{p}_\Lambda$.

Preuve de la Proposition.

- On a $\Delta^- \sqcup \Delta^+_{\pi'} = S \sqcup T \sqcup T'$ donc $\mathfrak{p}^*_\Lambda = \mathfrak{h}_\Lambda \oplus \mathfrak{g}_S \oplus \mathfrak{g}_T \oplus \mathfrak{g}_{T'}$ et $\mathfrak{p}_\Lambda = \mathfrak{h}_\Lambda \oplus \mathfrak{g}_{-S} \oplus \mathfrak{g}_{-T} \oplus \mathfrak{g}_{-T'}$.
- Comme $\Phi_{y|\mathfrak{g}_{-T'}\times\mathfrak{g}_{-T'}}$ est non dégénérée, on a $\mathfrak{g}_{T'} \subset (ad^*\mathfrak{g}_{-T'})(y) + \mathfrak{h}_\Lambda + \mathfrak{g}_S + \mathfrak{g}_T$. De plus $T' \cap S = \emptyset$ donc en fait on a
$$\mathfrak{g}_{T'} \subset (ad^*\mathfrak{g}_{-T'})(y) + \mathfrak{g}_S + \mathfrak{g}_T. \tag{1}$$
- Comme $S_{|\mathfrak{h}_\Lambda}$ est une base de $\mathfrak{h}^*_\Lambda$, on a
$$\mathfrak{g}_S = (ad^*\mathfrak{h}_\Lambda)(y) \tag{2}$$
et
$$\mathfrak{h}_\Lambda \subset (ad^*\mathfrak{g}_{-S})(y) + \mathfrak{g}_{T'} + \mathfrak{g}_T + \mathfrak{g}_S. \tag{3}$$
- Avec (1), (2) et (3) on en déduit que $\mathfrak{p}^*_\Lambda \subset (ad^*\mathfrak{p}_\Lambda)(y) + \mathfrak{g}_T$ et cette somme est directe puisque $\dim \mathfrak{g}_T = \mathrm{indice}\, \mathfrak{p}_\Lambda \leq \mathrm{codim}(ad^*\mathfrak{p}_\Lambda)(y)$. □

Conclusion de la preuve du théorème.

Supposons que l'on ait trouvé une paire adaptée $(h,\ y)$ pour $\mathfrak{p}_\Lambda$ grâce à la Proposition précédente et reprenons ses notations, notamment $\mathfrak{g}_T$.

- Si l'on sait déjà que $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}_\Lambda)$ est une algèbre de polynômes - par exemple si la borne inférieure et la borne supérieure établies par Joseph et F-M pour le caractère formel de $Sy(\mathfrak{p})$ coïncident - alors on peut conclure que $y + \mathfrak{g}_T$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}_\Lambda$, grâce au théorème de Joseph-Shafrir.
- Si par contre la polynomialité de $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}_\Lambda)$ n'est pas encore connue, on peut comparer la borne inférieure mentionnée ci-dessus et une borne supérieure ``améliorée'' (établie par Joseph) donnée par la paire adaptée, pour conclure que $y + \mathfrak{g}_T$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}_\Lambda$, si ces bornes coïncident.

Utilisation de la Proposition dans un premier exemple.

- Soit $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ simple de type B_3 associée au sous-ensemble $\pi' = \{\alpha_2\}$ avec la numérotation de Bourbaki.
- On note $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(\ ,\ )$ le produit scalaire usuel. Ici $\mathfrak{h}_\Lambda = \mathfrak{h}' = \mathbb{C}\alpha_2^\vee$ et le critère combinatoire de comparaison des bornes permet de dire que celles-ci coïncident et donc que $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}')$ est polynomiale en trois(=indice de $\mathfrak{p}'$) indéterminées.
- Les racines de Δ^+ peuvent être présentées de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon_1+\varepsilon_2 & \varepsilon_1+\varepsilon_3 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1-\varepsilon_3 & \varepsilon_1-\varepsilon_2 \\ & \varepsilon_2+\varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2-\varepsilon_3 & \\ & & \varepsilon_3 & & \end{array}$$

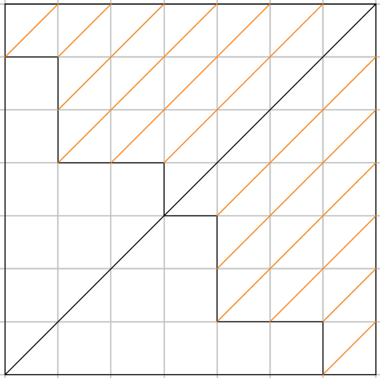
  De plus $\Delta^-_{\pi'} = \{-\alpha_2\}$.
- On note $\beta = \varpi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ la plus grande racine de $\mathfrak{g}$, puis on note β_1, resp. β_2, la plus grande racine de l'algèbre de Lie simple correspondant à une composante connexe de $\pi \setminus \{\alpha_2\}$.
- Ici $\beta_1 = \alpha_1$ et $\beta_2 = \alpha_3$.
- On considère l'ensemble de Heisenberg $H_\beta := \{\gamma \in \Delta^+ \mid (\beta, \gamma) > 0\}$.
- On réitère autant de fois que nécessaire ce procédé (c'est-à-dire en supprimant successivement de π les racines simples non orthogonales aux plus grandes racines), ce qui donne la cascade de Kostant $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$, formée des plus grandes racines successives obtenues ainsi. On considère également les sous-ensembles de Heisenberg H_{β_i} correspondant aux éléments β_i de $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$. On fait de même avec la cascade de Kostant $\mathcal{K}_{\mathfrak{r}'}$ de $\mathfrak{r}'$.
- La réunion $T \sqcup S = -\mathcal{K}_\mathfrak{g} \sqcup \mathcal{K}_{\mathfrak{r}'}$ avec dans T les éléments égaux à des racines simples ou à leur opposé.
- $-T'$ est alors égal à la réunion des différents sous-ensembles de Heisenberg (ou leurs opposés) privés de leur centre.

Suite du premier exemple.

- Ici on prend donc $-T = \{\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3\}$ et $-S = \{\beta\}$: $S_{|\mathfrak{h}'}$ est une base de $\mathfrak{h}'^*$. Enfin $-T' = H_\beta \setminus \{\beta\}$.
- Toutes les conditions de la Proposition sont satisfaites par un théorème de Joseph, qui affirme entre autres que $\Delta^+ = \sqcup_{\beta \in \mathcal{K}_\mathfrak{g}} H_\beta$ et car, si $\beta \in \mathcal{K}_\mathfrak{g} \cap \pi$, alors $H_\beta = \{\beta\}$.
- Soit $y = x_{-\beta}$, $h = \alpha_2^\vee$ et $V = \mathfrak{g}_T$. Alors (h, y) est une paire adaptée pour $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_\Lambda$ et $y + V$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}'$ d'après le théorème de J-S et est aussi une tranche affine d'après le théorème de J-F-M.
- Les valeurs propres de h sur V sont $1, 1, 2$ donc les degrés des générateurs homogènes algébriquement indépendants f_1, f_2, f_3 de $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}')$ sont: $2, 2, 3$.
- $c(\mathfrak{p}') = 1/2(\dim \mathfrak{p}' + \mathrm{indice}\, \mathfrak{p}') = 1/2(11 + 3) = 7 = \sum_{i=1}^3 \deg(f_i)$.

Illustration du premier exemple.

Sous − algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ *associée à* $\{\alpha_2\}$ *dans* $\mathfrak{g}$ *de type* B_3

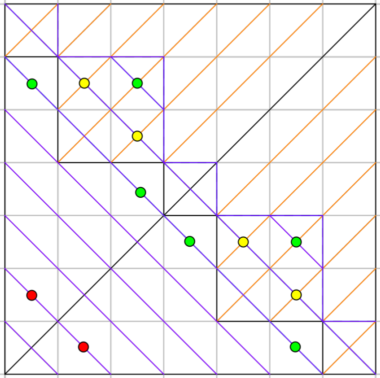


Ici $Y(\mathfrak{p}')$ *est une algèbre de polynômes*

De plus il existe une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}'$

Illustration du premier exemple (suite).

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ associée à $\{\alpha_2\}$ dans $\mathfrak{g}$ de type B_3



$\mathfrak{p}'$

$\mathfrak{p}'^*$

$y = x_{-\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3}$

$h = \alpha_2^\vee$

$V = \mathbb{C}x_{-\alpha_1} \oplus \mathbb{C}x_{-\alpha_3} \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_2}$

$(h,\, y)$ est une paire adaptée pour $\mathfrak{p}'$

$y + V$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}'$

Un exemple où les premières bornes ne coïncident pas.

- On considère $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre parabolique associée à $\pi' = \{\alpha_1, \alpha_3\}$ dans $\mathfrak{g}$ simple de type B_3 (toujours avec la numérotation de Bourbaki). Ici on a toujours $\mathfrak{p}_\Lambda = \mathfrak{p}'$ mais les premières bornes ne coïncident pas.
- Par contre on sait toujours calculer l'indice de $\mathfrak{p}'$ (égal au degré de transcendance de $Frac(Sy(\mathfrak{p}))$) qui vaut 3.
- De plus ici on ne peut pas prendre S qui contient la plus grande racine β car β s'annule sur π'.
- On prend $-S = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2\}$: $S_{|\mathfrak{h}'}$ est une base de $\mathfrak{h}'^*$ et on considère les sous-ensembles de Heisenberg $\Gamma_{\varepsilon_1+\varepsilon_3} = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\}$ et $\Gamma_{\varepsilon_2} = \{\varepsilon_2, \varepsilon_2 + \varepsilon_3, -\varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3, \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \varepsilon_1\}$. On pose aussi $-T = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \varepsilon_1 - \varepsilon_2\}$ et $-T' = \Gamma_{\varepsilon_2} \setminus \{\varepsilon_2\}$, de sorte que $\Delta^- \sqcup \Delta^+_{\pi'} = S \sqcup T \sqcup T'$.
- Alors on vérifie que toutes les conditions de la Proposition sont satisfaites: la non-degénérescence de Φ_y restreinte à $\mathfrak{g}_{-T'}$ est plus compliquée à vérifier car les éléments de S ne sont pas en général des éléments de la cascade de Kostant et les sous-ensembles de Heisenberg contiennent des racines à la fois positives et négatives, ce qui complique les choses.
- Si $y = x_{-(\varepsilon_1+\varepsilon_3)} + x_{-\varepsilon_2}$, et $h = -\alpha_1^\vee + \alpha_3^\vee$, alors (h, y) est une paire adaptée pour $\mathfrak{p}'$.
- Comme les premières bornes ne coïncident pas, on ne peut pas tout de suite conclure que $y + \mathfrak{g}_T$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}'$.

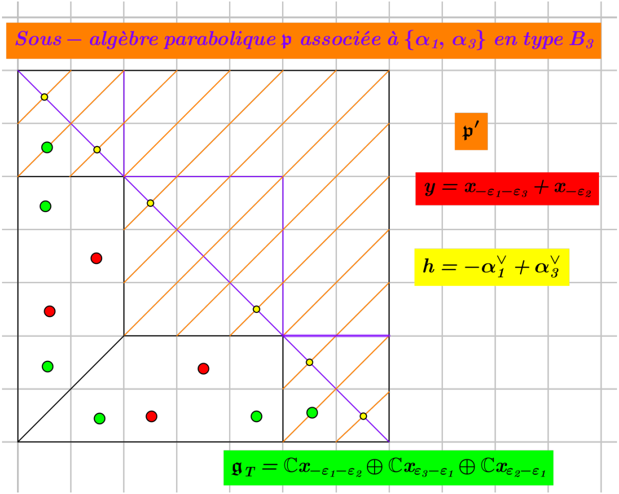
Suite du deuxième exemple.

- On calcule alors la borne inférieure et la borne supérieure améliorée donnée par la paire adaptée et on montre qu'elles sont égales. On peut alors conclure que $\mathcal{S} = y + \mathfrak{g}_T$ est une section de Weierstrass pour l'action coadjointe de $\mathfrak{p}'$ et est aussi une tranche affine.
- On a donc

$$\begin{array}{rccc} res: & Y(\mathfrak{p}') & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[\mathcal{S}] \\ & f & \longmapsto & f_{|\mathcal{S}} \end{array}$$

  qui est un isomorphisme d'algèbres donc l'algèbre des semi-invariants $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}')$ est une algèbre de polynômes.
- Les valeurs propres de h sur $\mathfrak{g}_T$ sont $0,\ 2,\ 3$ donc les degrés des générateurs homogènes algébriquement indépendants $f_1,\ f_2,\ f_3$ de $Sy(\mathfrak{p}) = Y(\mathfrak{p}')$ sont: $1,\ 3,\ 4$.
- $c(\mathfrak{p}') = 1/2(\dim \mathfrak{p}' + \mathrm{indice}\, \mathfrak{p}') = 1/2(13+3) = 8 = \sum_{i=1}^{3} \deg(f_i)$.

Illustration du deuxième exemple.



Perspectives.

- Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie simple: $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{r}$ est réductive et $\mathfrak{m}$ est le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$.
- Considérons la contraction $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{r} \ltimes (\mathfrak{m})^a$ où $(\mathfrak{m})^a$ devient un idéal abélien de $\tilde{\mathfrak{p}}$. Une telle contraction a été considérée par Panyushev et Yakimova mais aussi par Feigin pour d'autres exemples d'algèbres de Lie: elles s'appellent aussi contractions de Inonü-Wigner.
- On aimerait construire des sections de Weierstrass pour l'action coadjointe de $(\tilde{\mathfrak{p}})_\Lambda = \tilde{\mathfrak{p}}' = \mathfrak{r}' \ltimes (\mathfrak{m})^a$ lorsque $\mathfrak{p}$ est maximal.
- Signalons que l'algèbre de Lie dérivée $\mathfrak{s} = \mathfrak{r}'$ est semisimple (mais pas simple en général). De plus Panyushev et Yakimova ont étudié la polynomialité de l'algèbre d'invariants symétriques $Y(\mathfrak{q})$ associée au produit semi-direct $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \ltimes V^a$ uniquement lorsque $\mathfrak{s}$ est simple (et en type A, seulement pour un certain type de représentation V).