Invariants associés à des contractions de Inönü-Wigner.

Journée de l'Equipe AGL

Florence Fauquant-Millet

Université Jean Monnet Saint-Etienne - Institut Camille Jordan

07 janvier 2025

Plan

Références

- "Symmetric semi-invariants for some Inönü-Wigner contractions-I", Transformation Groups, DOI : `https://doi.org/10.1007/s00031-024-09897-6`.
- "Symmetric semi-invariants for some Inönü-Wigner contractions-II", en préparation.

Un exemple d'algèbre de Lie simple est $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2r+1}$ (on dit encore que $\mathfrak{g}$ est de type B_r, pour $r \geq 2$).

- On a
$$\mathfrak{so}_{2r+1} = \{M \in \mathcal{M}_{2r+1}(\mathbb{C}) \mid {}^t MJ + JM = 0\}$$
où J est la matrice de $\mathcal{M}_{2r+1}(\mathbb{C})$ formée de 1 sur l'antidiagonale et de zéros partout ailleurs.
- Autrement dit $\mathfrak{so}_{2r+1}$ est l'ensemble des matrices-carrées d'ordre $2r+1$ qui sont antisymétriques par rapport à l'antidiagonale.
- Munie du crochet de Lie $[M, N] = MN - NM$ pour tous $M, N \in \mathfrak{so}_{2r+1}$, on vérifie facilement que $\mathfrak{so}_{2r+1}$ est une algèbre de Lie.
- De plus $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2r+1}$ est simple (c'est-à-dire que tout idéal non nul de $\mathfrak{g}$ est nécessairement égal à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}$ n'est pas abélienne).

Premières définitions.

- L'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2r+1}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dite de Cartan. On la notera $\mathfrak{h}$.
- $\mathfrak{h}$ est abélienne et pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $M \in \mathfrak{g} \mapsto [H,\, M]$ est diagonalisable.
- Le système de racines Δ de $(\mathfrak{g},\, \mathfrak{h})$ est l'ensemble des valeurs propres de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$, appelées également poids.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ dite de Borel : on la notera $\mathfrak{b}$.
- Chaque matrice strictement triangulaire supérieure de $\mathfrak{g}$ formée d'un 1 (et d'un -1 symétriquement situé par rapport à l'antidiagonale) juste au-dessus de la diagonale et de zéros ailleurs, a un poids appelé racine simple de $(\mathfrak{g},\, \mathfrak{h})$.
- L'ensemble des racines simples de $(\mathfrak{g},\, \mathfrak{h})$ sera noté π.

Définitions.

- Une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui contient la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$.
- La sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ est donc uniquement déterminée par un sous-ensemble π' de π de sorte que $\mathfrak{p}$ contienne également les matrices de $\mathfrak{g}$ dont le poids appartient à $-\pi'$.
- Lorsque $\pi' = \emptyset$, on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$. Lorsque $\pi' = \pi$, on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$.
- Lorsque $|\pi \setminus \pi'| = 1$, la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ est dite maximale.
- Le radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{p}$ et un facteur de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{p}$ telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ et on a $[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$.

- Lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{n}$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2r+1}$ formée de toutes les matrices strictement triangulaires supérieures et on peut prendre $\mathfrak{l} = \mathfrak{h}$.
- Lorsque $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = \{0\}$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$.

Contraction de Inönü-Wigner.

- La contraction de Inönü-Wigner de $\mathfrak{p}$ suivant la décomposition $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ est $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{l} \ltimes \mathfrak{n}^a$ où $\mathfrak{n}^a$ est un idéal abélien de $\tilde{\mathfrak{p}}$.
- L'espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{p}}$ est isomorphe à $\mathfrak{p}$ comme $\mathfrak{l}$-module et est encore une algèbre de Lie, que l'on peut voir comme une dégénérescence de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_1\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_1\}$. En vert : radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$. En rouge : facteur de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		$1-2$	$1-3$	$1-4$	1	$1+4$	$1+3$	$1+2$	
2									$1+2$
3									$1+3$
4									$1+4$
5									1
6									$1-4$
7									$1-3$
8									$1-2$
9									

Ici $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ comme algèbre de Lie car $\mathfrak{n}$ est déjà abélien dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_2\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_2\}$. En vert : radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$. En rouge : facteur de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1			1 − 3	1 − 4	1	1 + 4	1 + 3	1 + 2	
2			2 − 3	2 − 4	2	2 + 4	2 + 3		1 + 2
3								2 + 3	1 + 3
4								2 + 4	1 + 4
5								2	1
6								2 − 4	1 − 4
7								2 − 3	1 − 3
8									
9									

Ici $\tilde{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$ comme algèbre de Lie car $\mathfrak{n}$ n'est pas abélien dans $\mathfrak{p}$. En effet, si $A_{i\pm j}$ est une matrice de $\mathfrak{p}$ de poids $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ on a dans $\mathfrak{p}$
$[A_{i-j}, A_{j\pm k}] = A_{i\pm k}$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_3\}$

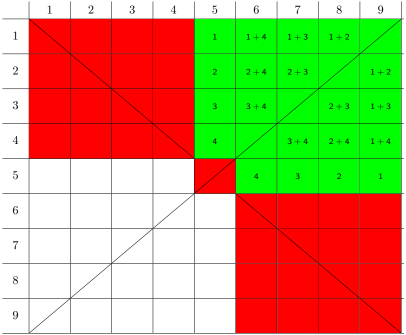
Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_3\}$. En vert : radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$. En rouge : facteur de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				$1-4$	1	$1+4$	$1+3$	$1+2$	
2				$2-4$	2	$2+4$	$2+3$		$1+2$
3				$3-4$	3	$3+4$		$2+3$	$1+3$
4							$3+4$	$2+4$	$1+4$
5							3	2	1
6							$3-4$	$2-4$	$1-4$
7									
8									
9									

Ici $\tilde{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$ comme algèbre de Lie car $\mathfrak{n}$ n'est pas abélien dans $\mathfrak{p}$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_4\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_4\}$. En vert : radical nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$. En rouge : facteur de Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$.



Ici $\tilde{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$ comme algèbre de Lie car $\mathfrak{n}$ n'est pas abélien dans $\mathfrak{p}$.

Algèbre des semi-invariants symétriques.

- On note $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ l'algèbre des semi-invariants symétriques de $\tilde{\mathfrak{p}}$: c'est aussi l'algèbre engendrée par les fonctions polynomiales sur le dual $\tilde{\mathfrak{p}}^*$ semi-invariantes par l'action coadjointe de $\tilde{\mathfrak{p}}$.
- Autrement dit, $Sy(\tilde{\mathfrak{p}}) = \bigoplus_{\lambda \in \tilde{\mathfrak{p}}^*} \{f \in \mathbb{C}[\tilde{\mathfrak{p}}^*] \mid \forall x \in \tilde{\mathfrak{p}},\ x.f = \lambda(x) f\}$.
- Une section de Weierstrass pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$, si elle existe, est un sous-espace affine $y + V$ de $\tilde{\mathfrak{p}}^*$ tel que

$$\begin{aligned} Sy(\tilde{\mathfrak{p}}) &\longrightarrow \mathbb{C}[y+V] \\ f &\mapsto f_{|y+V} \end{aligned}$$

  est un isomorphisme d'algèbres.
- Si une telle section de Weierstrass existe pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ alors $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ est une algèbre de polynômes en $\dim V$ variables.

- Problème : on veut construire des sections de Weierstrass pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ lorsque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique maximale d'une algèbre de Lie simple.
- Méthode : Utiliser le théorème suivant et construire une borne supérieure adéquate.

Théorème (FM, 2024)

Il existe une algèbre de polynômes $\mathcal{A}$ dont on connaît le nombre de générateurs et leur poids (non nuls) et il existe un morphisme injectif ψ de $\mathfrak{h}$-modules et d'algèbres ainsi que des graduations gr et gr' qui sont $\mathfrak{h}$-invariantes tels que l'on ait une injection d'algèbres et de $\mathfrak{h}$-modules

$$gr(\psi(gr'(\mathcal{A}))) \hookrightarrow Sy(\tilde{\mathfrak{p}}).$$

Cela implique, lorsque le caractère formel de $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ est bien défini, que l'on a

$$\mathrm{ch}\,\mathcal{A} \leq \mathrm{ch}\,Sy(\tilde{\mathfrak{p}}).$$

Section de Weierstrass.

- On construit un élément $y \in \tilde{\mathfrak{p}}'^*$ et un sous-espace vectoriel V de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ tels que l'on ait :

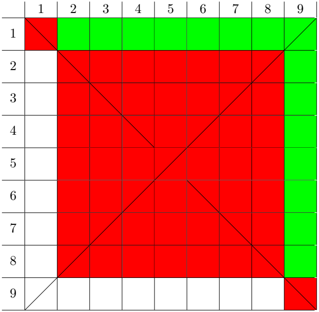
$$\mathrm{ad}^*\tilde{\mathfrak{p}}'(y) + V = \tilde{\mathfrak{p}}'^* \quad \text{et} \quad \dim V = \mathrm{indice}\,\mathfrak{p}'$$

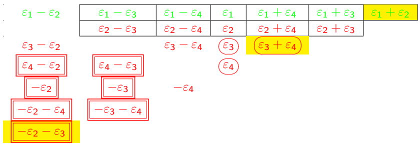
  Alors on en déduit que
  $\mathrm{degtr}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Frac}\,(\,Sy(\tilde{\mathfrak{p}}))) = \mathrm{indice}\,\tilde{\mathfrak{p}}' = \mathrm{indice}\,\mathfrak{p}'$.
- Avec des conditions supplémentaires sur y et V, on obtient ainsi une borne supérieure pour $\mathrm{ch}\,Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$.
- On montre que la borne supérieure ainsi obtenue coïncide avec la borne inférieure $\mathrm{ch}\,\mathcal{A}$.
- Cela implique que le sous-espace affine $y + V$ de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ est une section de Weierstrass pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ et donc la polynomialité de l'algèbre $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$.

- Un sous-ensemble Γ de Δ est dit de Heisenberg, de centre $\gamma \in \Gamma$ lorsque, pour tout $\alpha \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$, il existe $\alpha' \in \Gamma \setminus \{\gamma\}$ tel que $\alpha + \alpha' = \gamma$.
- La section de Weierstrass est obtenue en partitionnant l'ensemble des racines associées à $\mathfrak{p}$ en ensembles de Heisenberg Γ_γ (de centre γ) vérifiant un certain nombre de conditions : en particulier si $\alpha \in \Gamma_\gamma \setminus \{\gamma\}$ est le poids d'un élément du radical nilpotent, alors α' doit être le poids d'un élément du Levi.
- L'élément y est la somme des éléments de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ dont les poids sont les opposés des centres des ensembles de Heisenberg ainsi construits.
- Le sous-espace vectoriel V est obtenu à partir des racines restantes.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_1\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_1\}$. Ici $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ comme algèbre de Lie car $\mathfrak{n}$ est déjà abélien dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$.

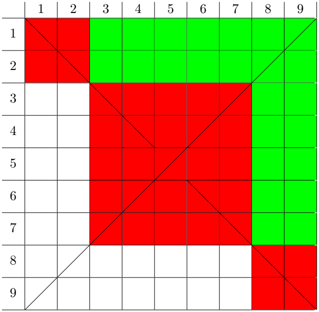


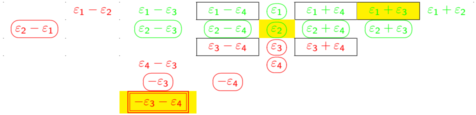


On obtient pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}}) = Sy(\mathfrak{p})$ la section de Weierstrass $y + V \subset \tilde{\mathfrak{p}}^* = \mathfrak{p}^*$ avec $y = x_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2} + x_{-\varepsilon_3-\varepsilon_4} + x_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}$ et $V = \mathbb{C}x_{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_4-\varepsilon_3} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_4}$.
Les quatre générateurs homogènes de $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ ont pour poids et pour degré respectifs : $(2\varpi_1, 2)$, $(2\varpi_1, 4)$, $(2\varpi_1, 6)$ et $(\varpi_1, 4)$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_2\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_2\}$.

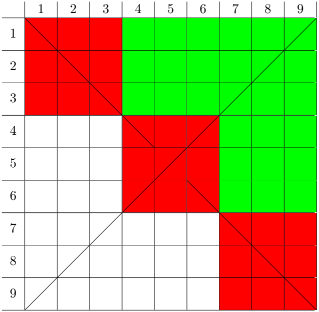


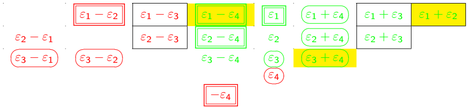


On obtient pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ la section de Weierstrass $y + V \subset \tilde{\mathfrak{p}}^*$ avec $y = x_{-\varepsilon_1-\varepsilon_3} + x_{-\varepsilon_2} + x_{\varepsilon_3+\varepsilon_4}$ et $V = \mathbb{C}x_{-\varepsilon_1-\varepsilon_2} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_3-\varepsilon_1} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_2-\varepsilon_1} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_3-\varepsilon_4}$.
Les quatre générateurs homogènes de $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ ont pour poids et pour degré respectifs : $(\varpi_2, 1)$, $(\varpi_2, 3)$, $(2\varpi_2, 4)$ et $(2\varpi_2, 6)$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_3\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_3\}$.

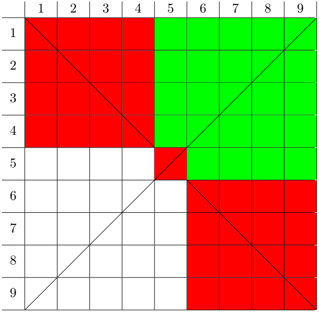


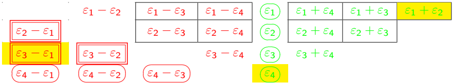


On obtient pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ la section de Weierstrass $y + V \subset \tilde{\mathfrak{p}}^*$ avec $y = x_{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + x_{-\varepsilon_3 - \varepsilon_4} + x_{\varepsilon_4 - \varepsilon_1}$ et $V = \mathbb{C}x_{-\varepsilon_2} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}$. Les trois générateurs homogènes de $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ ont pour poids et degré respectifs $(\varpi_3, 3)$, $(2\varpi_3, 4)$ et $(2\varpi_3, 6)$.

Exemple $\mathfrak{so}_9$ avec $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_4\}$

Sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{so}_9$ associée au sous-ensemble de racines simples $\pi' = \pi \setminus \{\alpha_4\}$.





On obtient pour $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ la section de Weierstrass $y + V \subset \tilde{\mathfrak{p}}^*$ avec
$y = x_{-\varepsilon_1 - \varepsilon_2} + x_{-\varepsilon_4} + x_{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}$ et
$V = \mathbb{C}x_{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \oplus \mathbb{C}x_{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} \oplus \mathbb{C}x_{-\varepsilon_3 - \varepsilon_4}$.
Les trois générateurs homogènes de $Sy(\tilde{\mathfrak{p}})$ ont pour poids et degré respectifs $(2\varpi_4, 4)$, $(2\varpi_4, 2)$, $(4\varpi_4, 8)$.

- On remarque que, pour chacun des cas ci-dessus, on a :
  La somme des degrés des générateurs homogènes est égale à $c(\tilde{\mathfrak{p}}')$ où $c(\tilde{\mathfrak{p}}') = 1/2(\dim \tilde{\mathfrak{p}}' + \text{indice}(\tilde{\mathfrak{p}}'))$.
- Cela implique (d'après un résultat de Joseph et Shafrir) que l'ensemble des éléments singuliers (c'est-à-dire non réguliers) de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ est de codimension supérieure ou égale à deux, et donc que l'ensemble des éléments réguliers de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ est "gros".
- Un élément de $\tilde{\mathfrak{p}}'^*$ est dit régulier lorsque son orbite coadjointe est de codimension minimale (égale à $\text{indice}(\tilde{\mathfrak{p}}')$).