CHAPITRE 5

LA CATÉGORIE DES MODULES GRADUÉS SUR UNE ALGÈBRE GRADUÉE[1]

Résumé. *On présente de façon détaillée quelques faits fondamentaux concernant la catégorie des modules gradués sur une algèbre graduée connexe (non commutative), et l'algèbre homologique qui va avec. Les références sont un exposé de Henri Cartan à son séminaire de 1959 [6], la section 8.7 du chapitre 10 de l'Algèbre de Bourbaki [5], et les rappels faits au début des articles de Artin-Tate-Van den Bergh [2, 3]. Le fait central pour l'algèbre homologique dans cette catégorie est l'existence (et une certaine unicité) de résolution projective minimale pour tout module gradué borné inférieurement. La minimalité signifie que l'on ne peut pas faire mieux pour calculer des* Tor *ou des* Ext.

1 La catégorie du titre

Dans tout ce chapitre, k est un corps commutatif et A est une k-algèbre associative unifère $\mathbb{N}$-graduée *connexe*. La graduation de A est notée A_n, $n \geq 0$. Dire que A est connexe signifie que $A_0 = k$. La projection naturelle $A \to k$ fait de k un A-module à gauche (respectivement à droite) qui sera parfois noté ${}_Ak$ (respectivement k_A).

La k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe A est dite *engendrée en degré 1* si A_1 engendre l'anneau $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus \cdots$.

Exemple 1.1 Soit V un k-espace vectoriel gradué concentré en degré 1 (i.e. $V = V_1$). Alors l'algèbre tensorielle $T(V)$ est une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe engendrée en degré 1. Si I est un idéal bilatère gradué distinct de $T(V)$, $A = T(V)/I$ est une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe engendrée en degré 1. Réciproquement, toute k-algébre $\mathbb{N}$-graduée connexe et engendrée en degré 1 est de cette forme. Si N est un entier ≥ 2 et si l'idéal bilatère I est engendré par un sous-espace vectoriel de $V^{\otimes N}$, A est dite N-homogène (on dira *quadratique* au lieu de 2-homogène, *cubique* au lieu de 3-homogène). L'algèbre symétrique et l'algèbre extérieure sont des exemples d'algèbres quadratiques. La géométrie algébrique [7] fournit de nombreuses classes d'algèbres quadratiques commutatives. La théorie des groupes quantiques [9] fournit des exemples d'algèbres quadratiques non commutatives. Les algèbres régulières d'Artin-Schelter (qui sont des analogues non commutatifs des algèbres de polynômes)

[1]septembre 2008

donnent des exemples d'algèbres quadratiques et cubiques [1, 2] non commutatives (voir le Chapitre 7).

On notera A-grMod la catégorie des A-modules à gauche M qui sont $\mathbb{Z}$-gradués. Les morphismes de cette catégorie sont les applications A-linéaires *conservant le degré* (i.e., homogènes de degré 0). La graduation de M sera notée $M_n, n \in \mathbb{Z}$. Le décalage $M(l)$ de M est le module M gradué par $M(l)_n = M_{n+l}$. On dit que M est *concentré en degré* l si $M = M_l$. Par exemple, k est un objet de A-grMod concentré en degré 0. Un module concentré en degré l est isomorphe à une somme directe de décalages $k(-l)$.

Un module M est dit *engendré en degré* l si $M = A.M_l$. Concentré en degré l implique engendré en degré l. Autre exemple : $A(-l)$ est engendré en degré l. Un module M est dit *libre-gradué* s'il a une base formé d'éléments homogènes ou, de facon équivalente, s'il est isomorphe à une somme directe de $A(-l_i)$.

Voici un moyen d'obtenir des modules libres-gradués. Soit E un objet de k-grMod (la catégorie des k-espaces vectoriels gradués) et soit $M = A \otimes_k E$. C'est naturellement un A-module à gauche gradué. Montrons qu'il est *libre-gradué*. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base homogène de E. Alors les $1 \otimes_k e_i$ forment une base homogène du A-module M. Cela vient d'un résultat général sur les produits tensoriels qui est le suivant :

Soit R un anneau, M un R-module à gauche libre de base (e_i) et N un R-module à droite ; alors tout élément de $N \otimes_R M$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_i n_i \otimes_R e_i$, où la famille des n_i est à support fini.

En fait, tout A-module libre-gradué peut s'écrire sous la forme $A \otimes_k E$. En effet, soit M un A-module gradué ayant une base homogène $(e_i)_{i \in I}$. D'après le résultat général rappelé juste précédemment, les $1 \otimes_A e_i$ forment une base homogène de l'espace vectoriel gradué $k \otimes_A M$. Par suite, $A \otimes_k (k \otimes_A M)$ est un A-module libre-gradué, isomorphe à M par $1 \otimes_k (1 \otimes_A e_i) \mapsto e_i$.

Les résultats qui vont suivre (à partir du Lemme 1.3) concernent surtout les modules gradués M qui sont *bornés inférieurement*, i. e. tels qu'il existe n vérifiant $M_m = 0$ dès que $m < n$. Un module libre-gradué est borné inférieurement si et seulement s'il est isomorphe à une somme directe de $A(-l_i)$ avec les degrés l_i bornés inférieurement.

Lemme 1.2 *Soit $\epsilon : A \to k$ la projection naturelle, et soit $\mathcal{I} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ le noyau de ϵ. Soit M un objet de A-grMod.*

(i) L'application A-linéaire $M \to k \otimes_A M$, $m \mapsto 1 \otimes_A m$, définit un isomorphisme de $M/\mathcal{I}.M$ sur $k \otimes_A M$.

(ii) Supposons M engendré en degré l. L'application $M_l \to k\otimes_A M$, $m \mapsto 1\otimes_A m$, est un isomorphisme k-linéaire.

(iii) Soit E un objet de k-grMod et soit $M = A \otimes_k E$ le A-module libre-gradué qui lui est naturellement associé. L'application k-linéaire $E \to k \otimes_A M$, $v \mapsto 1 \otimes_A (1 \otimes_k v)$, est un isomorphisme.

Preuve. L'application en (i) définit un morphisme $f : \overline{m} \mapsto 1 \otimes_A m$ de $M/\mathcal{I}.M$ vers $k \otimes_A M$. D'autre part, l'application $(1, m) \mapsto \overline{m}$ définit un morphisme g de $k \otimes_A M$ vers $M/\mathcal{I}.M$. De plus, f et g sont inverses l'un de l'autre, prouvant (i). Si M est engendré en degré l, alors $\mathcal{I}.M = \bigoplus_{n>l} M_n$, et l'on déduit (ii) de (i). Enfin, pour prouver (iii), il suffit de voir que l'application k-linéaire $E \to M/\mathcal{I}.M$, $v \mapsto \overline{1 \otimes_k v}$ est un isomorphisme. Or elle est clairement surjective. De plus, si $v \in E$ est tel que $1 \otimes_k v$ appartienne à $\mathcal{I}.M = \mathcal{I} \otimes_k E$, alors $(\epsilon \otimes_k 1_E)(1 \otimes_k v) = 0$. Mais l'application $k \otimes_k E \to E$, $1 \otimes_k u \mapsto u$, est un isomorphisme, donc $v = 0$. ∎

Lemme 1.3 *(Lemme de Nakayama gradué) Soit M un objet de A-grMod borné inférieurement. Si $k \otimes_A M = 0$ (autrement dit, si $M = \mathcal{I}.M$), alors $M = 0$.*

Preuve. Supposons $M = \mathcal{I}.M$. Raisonnons par l'absurde et supposons $M \neq 0$. Considérons le plus petit n tel que $M_n \neq 0$. L'inclusion de M_n dans $\mathcal{I}.M$ conduit à une contradiction. ∎

Cette preuve montre que si $(k \otimes_A M)_i = 0$ pour tout $i \leq m$, alors $M_i = 0$ pour tout $i \leq m$. Voici une variante du lemme de Nakayama gradué dont la preuve est laissée en exercice.

Exercice. Soit M un objet de A-grMod borné inférieurement. Soit N un sous-objet de M dans A-grMod. Si $N + \mathcal{I}.M = M$, alors $N = M$.

Lemme 1.4 *Soit $f : M \to M'$ un morphisme dans A-grMod. Si f est surjectif, alors $1_k \otimes_A f$ est surjectif. La réciproque est vraie si M' est borné inférieurement.*

Preuve. Comme le foncteur $k \otimes_A -$ est exact à droite, on a $\mathrm{coker}(1_k \otimes_A f) = k \otimes_A \mathrm{coker}(f)$, d'où la première implication. Si M' est borné inférieurement, alors $\mathrm{coker}(f)$ l'est aussi, si bien que la réciproque est une conséquence du lemme de Nakayama gradué. ∎

Exercice. Donner une autre preuve utilisant le Lemme 1.2 (i).

Lemme 1.5 *Soit $f : M \to M'$ un morphisme dans A-grMod.*

(i) On suppose M' borné inférieurement. Si f est surjectif et essentiel *(i. e., tout morphisme $\phi : X \to M$ de A-grMod tel que $f \circ \phi$ est surjectif, est surjectif ; ceci*

est équivalent à dire que la restriction de f à un sous-objet strict de M n'est jamais surjective), alors $1_k \otimes_A f$ est bijectif. La réciproque est vraie si M est en plus borné inférieurement.

(ii) Supposons f surjectif et M engendré en degré l. Alors f est essentiel si et seulement si $f_l : M_l \to M'_l$ est injectif.

Preuve. (i) Supposons f surjectif et essentiel. On sait déjà que $1_k \otimes_A f$ est surjectif par le lemme précédent. Notons N son noyau. Soit Y un supplémentaire gradué du sous-espace vectoriel gradué N de $k \otimes_A M$. Notons $\pi : M \to k \otimes_A M$ l'application canonique. Considérons un sous-module X de M tel que $\pi(X) = Y$ (par exemple, engendrer X par un relèvement d'une base homogène de Y). Notons $\phi : X \to M$ l'injection canonique. Alors $1_k \otimes_A (f \circ \phi)$ s'identifie à $1_k \otimes_A f : Y \to k \otimes_A M'$ qui est surjectif par choix de Y. Le lemme précédent montre que $f \circ \phi : X \to M'$ est surjectif. Puisque f est essentiel, $\phi : X \to M$ est surjectif, i. e. $X = M$. Mais alors $Y = \pi(X) = k \otimes_A M$, donc $N = 0$.

Réciproquement, supposons M borné inférieurement et $1_k \otimes_A f$ bijectif. Le lemme précédent implique que f est surjectif. Soit $\phi : X \to M$ tel que $f \circ \phi$ est surjectif. Alors $1_k \otimes_A (f \circ \phi)$ est surjectif, donc aussi $1_k \otimes_A \phi$. Le lemme précédent permet d'en déduire que ϕ est surjectif.

Dans les hypothèses de (ii), il est clair que M' est engendré en degré l, si bien que l'on peut appliquer (i). Il suffit ensuite d'utiliser le (ii) du Lemme 1.2 pour conclure. ∎

Par exemple, la projection naturelle $\epsilon : A \to k$ est essentielle.

Lemme 1.6 *Soit*

$$L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \tag{1.1}$$

un complexe dans A-grMod formé de modules libres-gradués, et où L est borné infèrieurement. Alors, ce complexe est exact si le complexe suivant est exact :

$$k \otimes_A L \xrightarrow{1_k \otimes_A g} k \otimes_A M \xrightarrow{1_k \otimes_A f} k \otimes_A N. \tag{1.2}$$

Preuve. Écrivons $L = A \otimes E$, $M = A \otimes F$, $N = A \otimes G$, où E, F, G sont des k-espaces vectoriels gradués (les produits tensoriels sur k sont notés sans k en sous-indice). Comme L est borné inférieurement, il existe un entier s tel que $E_i = 0$ si $i < s$. Considérons A comme une k-algèbre filtrée par les

$$A_{\geq p} = A_p \oplus A_{p+1} \oplus \cdots, \ p \geq 0.$$

La filtration est décroissante, exhaustive, séparée. Alors M est un A-module filtré par les $A_{\geq p} \otimes F$, $p \geq 0$, et cette filtration est décroissante, exhaustive, séparée. Idem pour L et N. Puisque $A_{\geq p} = \bigoplus_n (A_{\geq p} \cap A_n)$, la filtration de A est compatible avec sa graduation. Il est immédiat de vérifier que

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (A_{\geq p} \otimes F) \cap (A \otimes F)_n = A_{\geq p} \otimes F,$$

ce qui signifie que la filtration de M est compatible avec sa graduation. Idem pour L et N. Notons que $(A_{\geq p} \otimes E) \cap (A \otimes E)_n = 0$ si $p > n - s$. Par suite la filtration de L induit sur chaque composante homogène L_n une filtration *finie*.

Le complexe (1.2) est dans k-grMod. Identifiant naturellement $k \otimes_A L$ à E, ..., on voit que (1.2) s'identifie au k-grMod complexe

$$E \xrightarrow{\tilde{f}} F \xrightarrow{\tilde{g}} G. \tag{1.3}$$

Ici $\tilde{f}$ est défini comme la composée $E \hookrightarrow L \xrightarrow{f} M \twoheadrightarrow F$, où $E \hookrightarrow L$ (resp. $M \twoheadrightarrow F$) est l'injection (resp. la projection) canonique. Idem pour $\tilde{g}$.

Puisque A est $\mathbb{N}$-gradué, f envoie E vers $A_{\geq 0} \otimes F$. Donc par linéarité, f envoie $A_{\geq p} \otimes E$ vers $A_{\geq p} \otimes F$. Ainsi f est compatible avec les filtrations de L et M. De même g est compatible avec les filtrations de M et N. Par $A_{\geq p}/A_{\geq p+1} \cong A_p$, l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}(A)$ est naturellement isomorphe à A, et $\mathrm{gr}(L) \cong A \otimes E$, $\mathrm{gr}(M) \cong A \otimes F$, $\mathrm{gr}(N) \cong A \otimes G$. De plus, $\mathrm{gr}(f)$ est identifié à $1_A \otimes \tilde{f} : A \otimes E \to A \otimes F$. De même, $\mathrm{gr}(g)$ est identifié à $1_A \otimes \tilde{g} : A \otimes F \to A \otimes G$.

Supposons (1.2) exact. Appliquant le foncteur exact $A \otimes -$ au complexe exact (1.3) et utilisant les identifications ci-dessus, on voit que le complexe

$$\mathrm{gr}(L) \xrightarrow{\mathrm{gr}(f)} \mathrm{gr}(M) \xrightarrow{\mathrm{gr}(g)} \mathrm{gr}(N)$$

est exact. On conclut grâce à l'analogue gradué d'un résultat vu au Chapitre 3. Voir l'Annexe en fin de chapitre. ■

Exercice. Soit P un objet dans A-grMod. Montrer que P est projectif dans A-grMod si et seulement si P est projectif dans A-Mod.

Proposition 1.7 *Soit $f : M \to M'$ un morphisme surjectif essentiel de A-grMod. Supposons M' projectif. Alors f est un isomorphisme.*

Preuve. Puisque M' est projectif dans A-grMod, le noyau N de f possède dans M un sous-objet supplémentaire X (sous-objet de A-grMod). La restriction de f à X est surjective, donc $X = M$ et $N = 0$. ■

Définition 1.8 *Soit M un objet de A-grMod. Une* couverture projective *de M est un couple (P, f) pour lequel P est un objet projectif de A-grMod et $f : P \to M$ est un morphisme surjectif essentiel.*

Si M est projectif, $(M, 1_M)$ est une couverture projective de M. D'autre part, il est facile de vérifier que tout A-module libre-gradué est projectif. On verra une réciproque de cette assertion un peu plus loin. On sait que $\epsilon : A \to k$ est une couverture projective du module trivial k. Plus généralement, on a l'exemple suivant.

Exemple 1.9 Supposons M engendré en degré l. Alors l'application A-linéaire

$$f : A \otimes_k M_l \to M$$

induite naturellement par l'injection canonique de M_l dans M, est une couverture projective de M. Il suffit d'appliquer (ii) du Lemme 1.5.

Exemple 1.10 On suppose que A est engendrée en degré 1 (voir l'Exemple 1.1). Soit n un entier ≥ 0. Naturellement A_n est un objet de A-grMod, concentré en degré n. L'exemple précédent nous montre que l'application canonique

$$A \otimes_k A_n \longrightarrow A_n$$

est une couverture projective de A_n. Si $A_n \neq 0$, cette application n'est pas injective, i. e. A_n n'est pas projectif.

Exercice. Soit M le sous-A-module $A_n \oplus A_{n+1} \oplus \ldots$ de A. Donner une couverture projective de M. Donner des exemples où M n'est pas projectif.

Supposons maintenant que l'on ait deux couvertures projectives (P, f) et (P', f') d'un A-module gradué M. Puisque P est projectif, f se factorise en $f' \circ g$. Comme f' est essentiel, g est surjectif. Puisque $f' \circ g$ est essentiel, g est essentiel. La Proposition 1.7 entraine que g est un isomorphisme. On dit alors que la couverture projective de M est unique à un isomorphisme près. On notera que l'isomorphisme g en question n'est pas unique en général.

Théorème 1.11 *Soit M un objet de A-grMod, borné inférieurement. Alors M possède une couverture projective. Toute couverture projective (P, f) de M est telle que P est libre-gradué et borné inférieurement. Si A et M sont localement finis (cela signifie que chaque composante de A et M sont des k-espaces vectoriels de dimension finie), P l'est aussi. Si M est de type fini (comme A-module gradué), P l'est aussi. En outre, P est engendré en degré l si et seulement si M est engendré en degré l.*

Preuve. Considérant $\pi : M \to k \otimes_A M$, $m \mapsto 1 \otimes_A m$, comme un morphisme surjectif entre k-espaces vectoriels gradués, il existe une application k-linéaire graduée $\phi : k \otimes_A M \to M$ telle que $\pi \circ \phi$ est l'identité. Soit $c : A \otimes_k M \to M$ le morphisme définissant la structure de A-module de M. Posons $f = c \circ (1_A \otimes_k \phi)$. C'est une flèche $f : A \otimes_k (k \otimes_A M) \to M$ définie par

$$f(1 \otimes_k (1 \otimes_A m)) = \phi(1 \otimes_A m) \quad m \in M. \tag{1.4}$$

Calculons maintenant $1_k \otimes_A f$. Grâce à (iii) du Lemme 1.2, on identifie $v = 1 \otimes_A m$ à $1 \otimes_A (1 \otimes_k v)$ dont l'image par $1_k \otimes_A f$ est $1 \otimes_A \phi(v)$. Mais ce dernier est égal à $\pi \circ \phi(v) = v$. Ainsi $1_k \otimes_A f$ s'identifie à l'application identité de $k \otimes_A M$. Le lemme 1.5 (i) implique que f est un morphisme surjectif essentiel. D'autre part, $P = A \otimes_k (k \otimes_A M)$ est libre-gradué, donc projectif. Ainsi, (P, f) est une couverture projective de M. Clairement P est borné inférieurement. Si A et M sont localement finis, P est localement fini par construction. Si le A-module gradué M est de type fini, le k-espace vectoriel gradué $k \otimes_A M$ est de type fini, donc le A-module gradué P est de type fini. ■

Il y a une autre manière de construire une couverture projective (P, f) de M qui peut être utile. Supposons que $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $M_i = 0$ si $i < n$, et $M_n \neq 0$. On considère une suite d'espaces vectoriels X_i, $i \geq n$, définie par $X_n = M_n$, et pour $i > n$

$$M_i = (A.M_n + \cdots + A.M_{i-1})_i \oplus X_i.$$

Notons que ceci implique que $A.M_n + \cdots + A.M_i = A.X_n + \cdots + A.X_i$, $i \geq n$. En posant $\mathcal{I} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ comme dans le Lemme 1.2, on voit aisément que

$$(\mathcal{I}.M)_i = (A.M_n + \cdots + A.M_{i-1})_i, \ \ , i \geq n,$$

si bien que l'application canonique $X_i \to (M/\mathcal{I}.M)_i$ est bijective. Par suite, si on pose $P = \bigoplus_{i \geq n} A \otimes X_i$, l'application naturelle $f : P \to M$ est une couverture projective de M. Il suffit d'utiliser les Lemmes 1.2(i) et 1.5(i). On pourra poser $P = A \otimes X$, où $X = \bigoplus_{i \geq n} X_i$ est un espace vectoriel gradué contenu dans l'espace vectoriel gradué M. Notons que si M est engendré par des éléments homogènes dont le degré est majoré (en particulier si M est de type fini), les espaces vectoriels X_i non nuls sont en nombre *fini.* D'autre part, si M est localement fini, chaque X_i est un espace vectoriel de dimension finie, donc P est somme directe au plus dénombrable de décalages de A. Remarquons aussi que si A est localement fini et si M est de type fini, alors M est localement fini.

Corollaire 1.12 *Soit M un module projectif dans A-grMod, borné inférieurement. Alors M est libre-gradué.*

Preuve. Soit (P, f) une couverture projective de M dont l'existence est affirmée par le Théorème 1.11. La proposition 1.7 montre que M est isomorphe à P. Comme P est libre-gradué, M l'est aussi. ■

2 L'algèbre homologique dans la catégorie du titre

Dans ce qui suit, M désigne un objet de A-grMod qui est *borné inférieurement*. Comme conséquence immédiate du Théorème 1.11, on obtient que M a une résolution projective (dans A-grMod)

$$\cdots \longrightarrow P_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\,, \tag{2.1}$$

qui est *minimale*, c'est-à-dire que chaque morphisme surjectif $P_i \to \mathrm{im}(d_i)$ est essentiel. Pour abréger, nous noterons par P (ou aussi $P \to M$) la résolution (2.1). Noter que P est formée de modules libres-gradués et bornés inférieurement. D'autre part, si A et M sont localement finis, P est formée de modules localement finis qui sont somme directe au plus dénombrable de décalages de A. Mais on fera attention que si M est de type fini, P_0 est de type fini mais $P_1, P_2, \ldots$ ne sont pas en général de type fini (les $ker(d_i)$ n'ont aucune raison d'être de type fini). Toute résolution projective minimale P' de M est isomorphe à P (mais l'isomorphisme n'est pas unique) : il suffit d'appliquer de proche en proche le fait que deux couvertures projectives sont toujours isomorphes. On a même le résultat plus précis suivant (dont la preuve est laissée au lecteur).

Proposition 2.1 *Supposons que M ait des résolutions projectives minimales P et P'. Si f est un morphisme de résolution de P vers P', alors f est un isomorphisme.*

La proposition qui suit montre que toute résolution projective de M contient une résolution minimale comme "sommant" direct, ce qui justifie la terminologie de résolution *minimale*.

Proposition 2.2 *Soient P et P' des résolutions projectives de M, avec P minimale. Soient $f : P \to P'$ et $g : P' \to P$ des morphismes de résolutions. Alors f est injectif, g est surjectif, et P' est somme directe de* $\mathrm{im}(f)$ *et* $\ker(g)$. *De plus,* $\ker(g)$ *est d'homologie nulle.*

Preuve. D'après la Proposition 2.1, $\alpha = g \circ f$ est un isomorphisme de P sur lui-même. En particulier, f est injectif et g est surjectif. Posons $\tilde{f} = f \circ \alpha^{-1}$. On a $\mathrm{im}(\tilde{f}) = \mathrm{im}(f)$. Comme $g \circ \tilde{f} = 1_P$, on a $P' = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(g)$. D'autre part, la suite exacte

$$0 \to \ker(g) \to P' \xrightarrow{g} P \to 0, \tag{2.2}$$

dans laquelle g est un quasi-isomorphisme, et la longue suite exacte en homologie qui s'en déduit, montrent que $H(\ker(g)) = 0$. ∎

INTERPRÉTATION du début de la résolution projective minimale lorsque $M = k$: soit V un sous-espace vectoriel gradué de $\mathcal{I} = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ satisfaisant $\mathcal{I} = V \oplus \mathcal{I}^2$, alors $A \otimes V \to A \to k$ où les flèches sont naturelles, est le début d'une résolution projective minimale de k. Ainsi, avec les notations ci-dessous, on a

$$\mathrm{Tor}_0^A(k,k) \cong k \text{ et } \mathrm{Tor}_1^A(k,k) \cong V.$$

De plus on a un isomorphisme naturel d'algèbres graduées de $T(V)/I$ sur A où I est un idéal gradué de $T(V)$, et on a

$$\mathrm{Tor}_2^A(k,k) \cong I/(V \otimes I + I \otimes V).$$

Pour plus de détails, voir Appendix dans [8].

Pour tout A-module à droite M' (gradué ou non), on a par définition de Tor :

$$\mathrm{Tor}_i^A(M', M) = H_i(M' \otimes_A P, 1_{M'} \otimes_A d). \tag{2.3}$$

Si M' est un objet de grMod-A, alors $\mathrm{Tor}_i^A(M', M)$ est naturellement un objet de k-grMod, dont la graduation sera notée $\mathrm{Tor}_{i,j}^A(M', M)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Proposition 2.3 *Le complexe $k \otimes_A P$ est à différentielle nulle. En particulier, l'espace vectoriel gradué $\mathrm{Tor}_i^A(k, M)$ est isomorphe à $k \otimes_A P_i$, et le A-module gradué P_i est isomorphe à $A \otimes_k (\mathrm{Tor}_i^A(k, M))$.*

Preuve. On démontre seulement la première assertion, les deux autres étant des conséquences immédiates (pour la dernière, utiliser le Lemme 1.2 (iii)). Factorisons naturellement $d_{i+1} : P_{i+1} \to P_i$ en le morphisme surjectif essentiel $f : P_{i+1} \to Z_i$ et l'injection canonique $g : Z_i \to P_i$, où on a posé $Z_i = \mathrm{im}(d_{i+1}) = \ker(d_i)$. Il nous suffit de montrer que $1_k \otimes_A g$ est nulle. Or la composée

$$(1_k \otimes_A d_i) \circ (1_k \otimes_A g) : k \otimes_A Z_i \to k \otimes_A P_i \to k \otimes_A Z_{i-1} \tag{2.4}$$

est nulle. De plus, la seconde flèche est un isomorphisme puisque $d_i : P_i \to Z_{i-1}$ est un morphisme surjectif essentiel (Lemme 1.5, (i)). ■

Corollaire 2.4 *S'il existe un entier naturel n tel que $\mathrm{Tor}_n^A(k, M) = 0$, alors pour tout $i \geq n$, on a $\mathrm{Tor}_i^A(k, M) = 0$.*

Preuve. D'après l'hypothèse et la proposition, on a $P_n = 0$. Donc $P_i = 0$ pour tout $i \geq n$. La conclusion s'ensuit en utilisant encore la proposition. ■

Pour N et N' dans A-grMod, on définit les k-espaces vectoriels suivants

$$\mathrm{Hom}_A(N,N')_d = \{f \in \mathrm{Hom}_A(N,N') \ ; \ f(N_i) \subseteq N'_{i+d}, i \in \mathbb{Z}\}, \ d \in \mathbb{Z}, \tag{2.5}$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(N,N') = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(N,N')_d \,, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(N,N') = \mathrm{Hom}_A(N,N')_0 \,. \tag{2.7}$$

Pour tout A-module à gauche M' (gradué ou non), on a par définition de Ext :

$$\mathrm{Ext}^i_A(M,M') = H^i(\mathrm{Hom}_A(P,M')). \tag{2.8}$$

Si M' est un objet de A-grMod, on pose

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,M') = H^i(\underline{\mathrm{Hom}}_A(P,M')), \tag{2.9}$$

$$\mathrm{Ext}^i_{A\text{-gr}}(M,M') = H^i(\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(P,M')). \tag{2.10}$$

Il est clair que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,M')$ est un objet de k-grMod ; sa graduation sera notée $\underline{\mathrm{Ext}}^{i,j}_A(M,M')$, $j \in \mathbb{Z}$. On a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{i,0}_A(M,M') = \mathrm{Ext}^i_{A\text{-gr}}(M,M'), \tag{2.11}$$

et plus généralement,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{i,j}_A(M,M') = \mathrm{Ext}^i_{A\text{-gr}}(M,M'(j)) = \mathrm{Ext}^i_{A\text{-gr}}(M(-j),M'). \tag{2.12}$$

D'autre part, si le module M est de type fini dans A-grMod (i.e., engendré par un nombre fini d'éléments homogènes), on a

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,M') = \mathrm{Hom}_A(M,M') \,. \tag{2.13}$$

Si M a une résolution projective par des modules de type fini dans A-grMod, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,M') \cong \mathrm{Ext}^i_A(M,M'). \tag{2.14}$$

Proposition 2.5 *Le complexe* $\underline{\mathrm{Hom}}_A(P,k)$ *est à différentielle nulle. En particulier, l'espace vectoriel gradué* $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M,k)$ *est isomorphe à* $\underline{\mathrm{Hom}}_A(P_i,k)$.

Preuve. Soit une flèche $\varphi : P_i \to k(n)$ de A-grMod. On doit montrer que la composée $\varphi \ d_{i+1}$ est nulle. Sinon, elle serait surjective, donc aussi $1_k \otimes_A (\varphi \ d_{i+1})$. Mais cela contredit la nullité de $1_k \otimes_A d_{i+1}$ prouvée à la proposition précédente. ■

Comme P_i est isomorphe à $A \otimes_k (k \otimes_A P_i)$, on voit que $\underline{\mathrm{Hom}}_A(P_i, k)$ est isomorphe à $\underline{\mathrm{Hom}}_k(k \otimes_A P_i, k)$. Ainsi, $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, k)$ s'identifie au dual gradué de $\mathrm{Tor}^A_i(k, M)$. En particulier, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{i,j}_A(M, k) \cong (\mathrm{Tor}^A_{i,-j}(k, M))^*, \ j \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

Exercice. 1. Soit un morphisme surjectif $f : M \to M'$ de A-grMod, où M' est borné inférieurement. Si f est essentiel, alors $ker(f) \subseteq \mathcal{I}.M$. La réciproque est vraie si en plus M est borné inférieurement.

2. Soient M, P des objets de A-grMod, P projectif, P et M bornés inférieurement. Soit $f : P \to M$ un morphisme surjectif de A-grMod. Alors f est une couverture projective si et seulement si $ker(f) \subseteq \mathcal{I}.P$.

3. Soit M dans A-grMod borné inférieurement. Soit $P \xrightarrow{\epsilon} M$ une résolution projective de M dans A-grMod, formée de modules bornés inférieurement. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) P est minimale,
(ii) $\mathrm{im}(d_{i+1}) \subseteq \mathcal{I}.P_i$ pour tout $i \geq 0$ (où $d_{i+1} : P_{i+1} \to P_i$ désigne la différentielle de P),
(iii) le complexe $k \otimes_A P$ est à différentielle nulle.

Corrigé de l'exercice. 1. Supposons f essentiel. D'après le Lemme 1.5 (i) et le Lemme 1.2 (i), l'application $\tilde{f} : M/\mathcal{I}.M \to M'/\mathcal{I}.M'$ (canoniquement déduite de f) est injective. En particulier, $ker(f) \subseteq \mathcal{I}.M$. Réciproquement, si on a cette inclusion, considérons x dans M tel que $f(x)$ soit dans $\mathcal{I}.M'$. Comme f est surjective, on peut écrire $f(x) = \sum a_i.f(y_i) = f(\sum a_i.y_i)$, où $a_i \in I$ et $y_i \in M$. On en déduit que x est dans $\mathcal{I}.M$. Donc $\tilde{f}$ est injective, c'est-à-dire que $1_k \otimes_A f$ est injective. On conclut par le Lemme 1.5 (i) et le fait que M est borné inférieurement.

2. Immédiat avec 1.

3. D'après 2, P est minimale si et seulement si $\ker(d_i) \subseteq \mathcal{I}.P_i$ pour tout $i \geq 0$ (où on a posé $d_0 = \epsilon$), d'où (i) $\Leftrightarrow$ (ii). D'autre part, (ii) équivaut à dire que l'application canonique $P_{i+1}/\mathcal{I}.P_{i+1} \to P_i/\mathcal{I}.P_i$ est nulle pour tout $i \geq 0$. Mais cette dernière s'identifie à $1_k \otimes_A d_{i+1}$. ■

3 Dimension projective et dimension globale

Soit M un objet de A-grMod. La *dimension projective* $\mathrm{pd}(M)$ de M est, par définition, l'entier n minimum (s'il existe) tel qu'il existe une résolution projective (*dans* A-Mod) de M de la forme

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\,. \tag{3.1}$$

Autrement dit, $\mathrm{pd}(M) = n$ si M admet une résolution projective de longueur n, mais aucune de longueur $n-1$ (pour les puristes, $\mathrm{pd}(0) = -\infty$). Si n n'existe pas (i.e. si M n'a pas de résolution projective de longueur finie), on pose $\mathrm{pd}(M) = \infty$.

Ce que l'on vient de faire s'applique à tout A-module à gauche M. Mais avec notre M gradué, on considère également $\mathrm{gr.pd}(M)$ défini comme ci-dessus mais en imposant aux résolutions projectives d'être dans A-grMod. Il est clair que

$$pd(M) \leq gr.pd(M).$$

Lemme 3.1 *Soit M un objet de A-grMod, borné inférieurement, et soit n un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $gr.pd(M) \leq n$,

(ii) $pd(M) \leq n$,

(iii) $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k, M) = 0$.

Preuve. Clairement, (i)⇒(ii). Supposons (ii). Soit P une résolution projective de M de longueur $\leq n$. Alors $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k, M) = H_{n+1}(k \otimes_A P)$ est nul puisque $P_{n+1} = 0$, d'où (iii). Supposons (iii). Soit P une résolution projective minimale de M dans A-grMod. D'après la Proposition 2.3, on a $P_{n+1} = 0$. Donc $P_i = 0$ pour tout $i \geq n+1$, d'où (i). ■

Proposition 3.2 *Soit M un objet de A-grMod, borné inférieurement. On a*

$$pd(M) = gr.pd(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\};\ \mathrm{Tor}^A_i(k, M) \neq 0\}$$

$$= \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\};\ \underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, k) \neq 0\},$$

où par convention, on a posé $\mathrm{Tor}^A_\infty(k, M) = \underline{\mathrm{Ext}}^\infty_A(M, k) = 0$.

Preuve. Supposons $\mathrm{pd}(M) = n < \infty$. Le lemme montre que $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k, M) = 0$ et que $\mathrm{Tor}^A_n(k, M) \neq 0$. Le Corollaire 2.4 implique aussi que $\mathrm{Tor}^A_i(k, M) = 0$ pour tout $i \geq n+1$, donc

$$pd(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,;\ \mathrm{Tor}^A_i(k, M) \neq 0\}.$$

Cette égalité est encore valable si $\mathrm{pd}(M) = \infty$ puisque le lemme dit que dans ce cas, $\mathrm{Tor}^A_{n+1}(k, M) \neq 0$ pour tout $n \geq 0$.

La preuve que l'on vient de faire marche encore si pd est remplacé par gr.pd. Enfin, on a vu (après la Proposition 2.5) que $\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(M, k)$ est isomorphe au dual gradué de $\mathrm{Tor}^A_i(k, M)$. ■

Corollaire 3.3 *Si M est un objet de A-grMod borné inférieurement, alors $pd(M)$ est la longueur (pouvant être infinie) d'une résolution projective minimale de M.* ■

Pour les modules arbitraires, on a le résultat classique suivant, que l'on admettra en partie [5, 11].

Proposition 3.4 ("pd Lemma") *Soient A un anneau, M un objet de A-Mod, et n un entier naturel. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $pd(M) \leq n$,

(ii) $Ext^i_A(M,N) = 0$ pour tout $i > n$ et tout objet N de A-Mod,

(iii) $Ext^{n+1}_A(M,N) = 0$ pour tout objet N de A-Mod,

(iv) Si $0 \to M' \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ est une résolution de M dans A-Mod avec les P_i projectifs, alors M' est projectif.

Les implications (iv)⇒(i)⇒(ii)⇒(iii) sont faciles à démontrer (exercice !). Pour (iii)⇒(iv), voir les références ci-dessus.

Définissons maintenant la dimension globale gauche et la dimension globale droite de l'anneau A par

$$l.gl.\dim(A) = \sup\{pd(M);\ M \in A\text{-Mod}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

$$r.gl.\dim(A) = \sup\{pd(M);\ M \in \text{Mod-}A\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Quand on impose à M d'être dans A-grMod (resp. grMod-A), ces quantités sont notées $gr.l.gl.\dim(A)$ (resp. $gr.r.gl.\dim(A)$). Il est parfois commode de noter ${}_Ak$ le A-module à gauche trivial k, et k_A le A-module à droite trivial k. Il est clair que

$$pd({}_Ak) \leq gr.l.gl.\dim(A) \leq l.gl.\dim(A),$$

idem à droite.

Théorème 3.5 *Pour toute algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe A sur un corps commutatif k, on a $l.gl.\dim(A) = r.gl.\dim(A) = pd({}_Ak) = pd(k_A)$.*

Nous allons consacrer le reste de la section à démontrer ce théorème. Noter qu'il impliquera $gr.l.gl.\dim(A) = l.gl.\dim(A)$, idem à droite.

Pour démontrer le Théorème 3.5, nous allons passer aux *bimodules.* Commençons par quelques généralités. Tant que l'on ne fera pas mention de la graduation de A, ces généralités seront valables pour toute algèbre associative unifère A sur un corps commutatif k.

Un A-A-bimodule M est un groupe abélien qui est un A-module à gauche et un A-module à droite, et tel que $(am)b = a(mb)$ et $\lambda m = m\lambda$ pour tout m dans M, a et b dans A, λ dans k. On note A-Mod-A la catégorie des A-A-bimodules, et on notera A-grMod-A celle des bimodules gradués en un sens évident.

On note A^{op} la k-algèbre *opposée* à A. L'algèbre $A^e = A \otimes_k A^{op}$ est une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe, qui est engendrée en degré 1 si A l'est. Noter que le produit de A^e est donné par :

$$(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db.$$

Tout A-A-bimodule M peut être vu comme un A^e-module à gauche (resp. à droite) par :

$$(a \otimes b).m = amb \quad \text{(resp. } m.(a \otimes b) = bma).$$

On a ainsi défini des isomorphismes naturels entre les catégories A-Mod-A, A^e-Mod et Mod-A^e (on a aussi des isomorphismes naturels quand on remplace Mod par grMod). En particulier, on a

$$pd({}_A M_A) = pd({}_{A^e} M) = pd(M_{A^e}),$$

et, lorsque M est gradué borné inférieurement, ces quantités sont égales aux gr.pd correspondants d'après la Proposition 3.2. D'après la Proposition 3.4, on a

$$\mathrm{pd}({}_A A_A) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,; \text{il existe un bimodule } M \text{ tel que } Ext^i_{A^e}(A, M) \neq 0\,\},$$

avec la convention $\mathrm{Ext}^{\infty}_{A^e}(A, M) = 0$.

Définition 3.6 *$pd({}_A A_A)$ s'appelle la dimension de Hochschild de A.*

Cette terminologie vient du fait que $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, M)$ s'identifie au i-ième espace de *cohomologie de Hochschild* de A à coefficients dans M. Examinons ceci en détail. Nous utiliserons la convention qu'un produit tensoriel $\otimes$ sans indice est un produit tensoriel sur le corps de base k.

Pour $n \geq 0$, on pose $B_n = A^{\otimes(n+2)}$, et on définit le *bar complexe* $B(A)$ par

$$\cdots \longrightarrow B_n \xrightarrow{b_n} B_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_1 \xrightarrow{b_1} B_0 \longrightarrow 0\,,$$

où $b_n : B_n \to B_{n-1}$ est défini pour tout $n \geq 1$ par

$$b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_n^i,$$

$$d_n^i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Comme $d_{n-1}^i d_n^j = d_{n-1}^{j-1} d_n^i$ pour $i < j$, on a $b_{n-1} b_n = 0$. Ainsi $B(A)$ est un complexe de A-A-bimodules libres. Pour tout A-module à gauche M, on pose $B(A, M) = B(A)_A \otimes_A M$. C'est un complexe de A-modules à gauche libres. On notera b_M la différentielle $b_A \otimes_A 1_M$ de $B(A, M)$.

Considérant M comme un complexe concentré en degré 0, on définit le morphisme de complexes de A-Mod $\epsilon_M : B(A, M) \to M$ par sa composante homogène de degré 0 qui est telle que

$$\epsilon_M((a_0 \otimes a_1) \otimes_A m) = a_0 a_1 m, \quad a_0 \in A, \ a_1 \in A, \ m \in M.$$

On notera que lorsque $M = A$, ϵ_A s'identifie au *produit* de A, si bien que c'est un morphisme de complexes de A-Mod-A.

Proposition 3.7 *$\epsilon_M : B(A, M) \to M$ est une résolution projective de M dans A-Mod, appelée la* bar résolution *de M. Lorsque $M = A$, c'est une résolution projective de A dans A-Mod-A.*

Preuve. Il suffit de prouver que ϵ_M est un quasi-isomorphisme. En fait, on va montrer quelque chose de plus fort, à savoir que ϵ_M est une *équivalence d'homotopie* (*homotopisme* chez Bourbaki) entre les complexes de k-Mod sous-jacents. Cela signifie qu'il existe un morphisme de complexes de k-Mod $\eta_M : M \to B(A, M)$ telles que $\epsilon_M \eta_M$ et $\eta_M \epsilon_M$ soient homotopes dans k-Mod à 1_M et $1_{B(A,M)}$ respectivement. Deux morphismes de complexes de chaînes dans k-Mod $f, g : (C, d) \to (C', d')$ sont dits *homotopes* s'il existe $s : C \to C'$ dans k-Mod et *de degré 1* (i.e., $s_n : C_n \to C'_{n+1}$) tel que $g - f = d's + sd$. Il est clair qu'une équivalence d'homotopie est un quasi-isomorphisme.

Pour $n \geq 0$, définissons l'application k-linéaire $s_n : B_n \to B_{n+1}$ par

$$s_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}.$$

C'est une application A-linéaire à droite qui vérifie

$$d^i_{n+1} s_n = s_{n-1} d^{i-1}_n \quad \text{pour } n \geq 1, \quad 1 \leq i \leq n+1,$$

$$d^0_{n+1} s_n = 1_{B_n} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

d'où $b_{n+1} s_n + s_{n-1} b_n = 1_{B_n}$ pour $n \geq 1$. De plus, on a $b_1 s_0(a_0 \otimes a_1) = a_0 \otimes a_1 - 1 \otimes a_0 a_1$.

Notons $\eta : A \to B(A)$ le morphisme de complexes de Mod-A dont la composante homogène de degré 0 est $A \to A \otimes A$, $a \mapsto 1 \otimes a$. On a $\epsilon_A \eta = 1_A$ et $bs + sb = 1_{B(A)} - \eta \epsilon_A$. Posant $\eta_M = \eta \otimes_A 1_M$ et $s_M = s \otimes_A 1_M$, on en déduit que $\epsilon_M \eta_M = 1_M$ et $b_M s_M + s_M b_M = 1_{B(A,M)} - \eta_M \epsilon_M$. ■

Définition 3.8 *Soit M un A-A-bimodule. Pour chaque entier naturel n, on pose $HH_n(A, M) = H_n(M \otimes_{A^e} B(A))$ et $HH^n(A, M) = H^n(Hom_{A^e}(B(A), M))$, et ces k-espaces vectoriels sont appelés respectivement les n-ièmes* espaces d'homologie et de cohomologie de Hochschild *de la k-algèbre associative unifère A à coefficients dans le bimodule M. Les complexes $M \otimes_{A^e} B(A)$ et $Hom_{A^e}(B(A), M)$ sont appelés* complexes de Hochschild.

Identifiant $M \otimes_{A^e} B_n$ à $M \otimes_k A^{\otimes n}$ et $Hom_{A^e}(B_n, M)$ à $Hom_k(A^{\otimes n}, M)$, il est facile d'écrire les différentielles des complexes de Hochschild telles que les a introduites Hochschild dans les années 1940. Par définition, on a

$$\mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A) \cong HH_n(A, M), \quad \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, M) \cong HH^n(A, M).$$

On a donc expliqué la terminologie "dimension de Hochschild" de la définition 3.6.

Nous avons besoin maintenant d'un isomorphisme naturel que nous allons présenter. Soient E dans A-Mod-A, F et G dans A-Mod. Le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_k(F, G)$ est un A-A-bimodule par la règle

$$a.\varphi.b : x \mapsto a\varphi(bx).$$

On a un isomorphisme naturel de k-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_A(E \otimes_A F, G) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(E, \mathrm{Hom}_k(F, G)), \tag{3.2}$$

défini par $h \mapsto h'$, où $(h'(x))(y) = h(x \otimes_A y)$ pour x dans E et y dans F. En particulier, revenant à la bar résolution $B(A, M)$ du A-module à gauche M, on a pour tout A-module à gauche N, un isomorphisme de complexes de k-Mod :

$$\mathrm{Hom}_A(B(A, M), N) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-}A}(B(A), \mathrm{Hom}_k(M, N)). \tag{3.3}$$

Prenant la cohomologie en degré n et utilisant la Proposition 3.7, on obtient

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, N) \cong HH^n(A, \mathrm{Hom}_k(M, N)). \tag{3.4}$$

Théorème 3.9 *Pour toute k-algèbre associative unifère A, la dimension globale gauche ou droite de A est $\leq$ à la dimension de Hochschild de A.*

Preuve. Il suffit de traiter la dimension globale gauche. Soit D la dimension de Hochschild de A. Si $D = \infty$, c'est terminé. Supposons D finie. D'après la définition de D, l'isomorphisme (3.4) et la Proposition 3.4, $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ dès que $n > D$. Ceci étant vrai quel que soit le A-module à gauche N, la Proposition 3.4 montre que $pd(M) \leq D$. Ceci étant vrai pour tout A-module à gauche M, $l.gl.\dim(A) \leq D$. ■

On est maintenant en mesure de prouver le Théorème 3.5. La suite d'inégalités

$$pd({}_Ak) \leq l.gl.\dim(A) \leq pd({}_AA_A),$$

montre qu'il suffit d'avoir $pd({}_AA_A) = pd({}_Ak)$ pour conclure (par symétrie, on aura aussi $pd({}_AA_A) = pd(k_A)$). Revenons à la k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe A^e. Comme

A est un A^e-module gradué borné inférieurement, il a une résolution projective minimale P dans A-grMod-A dont la différentielle sera notée d. Considérons le complexe $Q = P \otimes_A k$ de A-grMod, dont la différentielle sera notée δ. Comme $P_1 \to P_0 \to A \to 0$ est exact, $Q_1 \to Q_0 \to k \to 0$ est exact. Regardant P comme une résolution projective de A dans Mod-A et la comparant avec l'application identité de A, on voit qu'il y a dans Mod-A deux morphismes de résolutions $f : P \to A$ et $g : A \to P$ (où A est considéré comme un complexe concentré en degré 0), et une homotopie $s : P \to P$ tels que

$$1_P - gf = sd + ds.$$

Clairement, $1_P = sd + ds$ en degré > 0. Appliquant $- \otimes_A k$, on obtient

$$1_Q = (s \otimes_A 1_k)\delta + \delta(s \otimes_A 1_k)$$

en degré > 0, ce qui implique que Q est exact en degré > 0. Ainsi, Q est une résolution projective de ${}_A k$ dans A-grMod.

Montrons que Q est minimale. On applique l'exercice de la fin de la section 2 : comme $k \otimes_A Q = k \otimes_A P \otimes_A k$ et comme P est minimale, $k \otimes_A Q$ est à différentielle nulle, donc Q est minimale. Or P_i est de la forme $A \otimes E \otimes A$ avec E espace vectoriel, donc $Q_i = A \otimes E$, si bien que $P_i = 0$ si et seulement si $Q_i = 0$. Par suite, les résolutions P et Q ont *la même longueur*. Utilisant le Corollaire 3.3, on obtient $pd({}_A A_A) = pd({}_A k)$. Le Théorème 3.5 est (enfin !) démontré. On notera que l'on a aussi obtenu :

Théorème 3.10 *Soit A une k-algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe sur un corps commutatif k. La dimension de Hochschild de A est égale à la dimension globale gauche ou droite de A.* ■

Le Théorème 3.5 est un théorème fondamental bien connu de la théorie. Il figure dans [2], avec une preuve "rapide" dans la section 2 de cet article. La preuve en question se termine par la phrase : "There is no difficulty in adapting the proof (sous-entendu la preuve d'un théorème dû à Auslander) to the graded case", ce que je n'ai pas réussi à faire. Le Théorème 3.10 est nouveau et vient de paraître aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [4]. Sa démonstration dans l'article [4] est exactement celle donnée dans ce cours. Comme on vient de le voir, elle fournit en même temps une preuve naturelle (sans théorème d'Auslander !) du Théorème 3.5.

Remarque 3.11 On peut prouver directement (i.e., sans utiliser la dimension de Hochschild ou la dimension globale) que

$$pd({}_A k) = pd(k_A).$$

En effet, tout ce que nous avons fait dans la catégorie A-grMod se transporte à la catégorie grMod-A des A-modules à droite gradués. Soit M un objet de grMod-A borné inférieurement. Alors M a une résolution projective minimale P dans grMod-A. D'autre part, on sait que $\mathrm{Tor}_i^A(M,k) = H_i(P \otimes_A k)$: c'est un fait fondamental de l'algèbre homologique que, pour calculer $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$, on peut soit se servir d'une résolution de M, soit se servir d'une résolution de N. L'analogue de la Proposition 2.3 implique donc que $\mathrm{Tor}_i^A(M,k) = P_i \otimes_A k$. On a encore l'analogue du Lemme 3.1 dans lequel (iii) est remplacé par $\mathrm{Tor}_{n+1}^A(M,k) = 0$, si bien que l'on a

$$pd(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,;\ \mathrm{Tor}_i^A(M,k) \neq 0\}.$$

Finalement les deux égalités

$$pd({}_Ak) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,;\ \mathrm{Tor}_i^A(k_A, {}_Ak) \neq 0\},$$

$$pd(k_A) = \sup\{i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\,;\ \mathrm{Tor}_i^A(k_A, {}_Ak) \neq 0\}$$

permettent de conclure.

Remarque 3.12 Soit A un anneau et soit M dans A-Mod. La *dimension plate* $fd(M)$ est l'entier naturel minimum n (s'il existe) tel qu'il existe une résolution plate de M de longueur n. Si aucune résolution de ce type n'existe, on pose $fd(M) = \infty$. Comme tout module projectif est plat, il est clair que $fd(M) \leq pd(M)$. Par suite $w.\dim(A) \leq l(\text{ou } r).gl\dim(A)$ où la *dimension faible* $w.\dim(A)$ est le sup dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ des $fd(M)$ quand M décrit A-Mod (qui coïncide avec le sup des $fd(M)$ quand M décrit Mod-A : pour la dimension faible, il n'y a pas lieu de distinguer entre gauche et droite). Voir [11].

Supposons maintenant que A soit $\mathbb{N}$-graduée connexe sur un corps commutatif k. Pour tout M dans A-grMod, on peut définir $gr.fd(M)$ en imposant aux résolutions plates d'être dans A-grMod, et on peut définir $gr.w.\dim(A)$ comme étant le sup des $gr.fd(M)$ quand M décrit A-grMod. Alors le Lemme 3.1 est encore valable lorsqu'on remplace pd par fd et $gr.pd$ par $gr.fd$ (utiliser le fd lemma de [11]). Donc pour tout objet M de A-gr-Mod borné inférieurement et avec ces mêmes remplacements, on a l'analogue de la Proposition 3.2, de sorte que $fd(M) = pd(M)$, et M est plat dans A-grMod si et seulement si M est plat dans A-Mod (l'implication $\Leftarrow$ ne nécessite pas l'hypothèse de bornitude inférieure, j'allais dire bravitude...). On en déduit le résultat suivant qui complète le Théorème 3.5.

Théorème 3.13 *Pour toute algèbre $\mathbb{N}$-graduée connexe A sur un corps commutatif k, on a $w.\dim(A) = gr.w.\dim(A) = gl.\dim(A)$.*

On notera aussi que, grâce au fd Lemma, on peut remplacer les Ext par des Tor (i.e. la cohomologie de Hochschild par son homologie) dans la formule énoncée juste avant la Définition 3.6 et exprimant la dimension de Hochschild de A.

Pour terminer, nous laissons au lecteur le soin de prouver le théorème suivant.

Théorème 3.14 *Soit A une $\mathbb{N}$-graduée connexe A sur un corps commutatif k.*
(i) $gl.\dim(A) = 0$ si et seulement si $A \cong k$.
(ii) $gl.\dim(A) = 1$ si et seulement s'il existe un espace vectoriel non nul V gradué en degré > 0 et tel que $A \cong T(V)$.
(iii) Supposons que l'algèbre A soit commutative et de type fini. Alors la dimension globale de A est finie si et seulement si A est isomorphe à une algèbre de polynômes sur un nombre fini de générateurs homogènes de degré > 0.

Les algèbres de polynômes graduées sont les objets fondamentaux de la géométrie algébrique projective. L'analogue non commutatif de la géométrie algébrique projective est toujours à l'ordre du jour...

4 Annexe : un résultat de filtration-graduation

Proposition 4.1 *Soit R une k-algèbre associative munie d'une $\mathbb{Z}$-filtration F qui est décroissante. Soient L, M, N trois R-modules $\mathbb{Z}$-filtrés. La filtration de ces modules est aussi notée par F. Supposons que la k-algèbre R est $\mathbb{Z}$-graduée et que les R-modules L, M, N sont $\mathbb{Z}$-gradués. Supposons que les filtrations et les graduations sont compatibles. Considérons le complexe suivant de R-modules filtrés*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N, \tag{4.1}$$

tel que f et g sont homogènes de degré 0 (pour les graduations). Si la filtration de L est finie dans R-grMod et si la filtration de M est exhaustive et séparée, l'exactitude du $gr_F(R)$-grMod complexe

$$\mathrm{gr}_F(L) \xrightarrow{\mathrm{gr}_F(f)} \mathrm{gr}_F(M) \xrightarrow{\mathrm{gr}_F(g)} \mathrm{gr}_F(N) \tag{4.2}$$

implique l'exactitude de (4.1).

Preuve. Considérons M muni de sa filtration $F_p(M)$, $p \in \mathbb{Z}$, et de sa graduation M_n, $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que chaque M_n est filtré par les k-espaces vectoriels $M_n \cap F_p(M)$, $p \in \mathbb{Z}$, que l'on notera $F_p(M_n)$. La filtration ainsi obtenue sur M_n est exhaustive et séparée puisque celle de M l'est. Dire que la filtration $(F_p(M))$ et la graduation (M_n) sont compatibles signifie que

$$F_p(M) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_p(M_n)$$

(on a toujours $\supseteq$). Autrement dit, chaque $F_p(M)$ est *gradué* par les $F_p(M_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Par suite, $\mathrm{gr}_F(M)$ est aussi *gradué* par les $\mathrm{gr}_F(M_n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Il en est de même de L et de N.

D'autre part, le complexe (4.1) est somme directe des complexes de k-espaces vectoriels filtrés

$$L_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} N_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.3}$$

et l'on vient de montrer que la compatibilité filtration/graduation implique que (4.2) est *somme directe* des complexes $\mathrm{gr}_F(4.3)$.

Supposons (4.2) exact. Alors pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{gr}_F(4.3)$ est exact. Comme la filtration de L_n est finie et celle de M_n est exhaustive et séparée, on peut appliquer le Theorem III.3 (p. 288-289) de [10] : le complexe (4.3) est exact. Ceci étant vrai pour tout n, le complexe (4.1) est exact. ■

References

[1] M. Artin, W. F. Schelter, Graded algebras of global dimension 3, *Adv. Math.* **66** (1987), 171-216.

[2] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves, The Grothendieck Festschrift, vol 1, Birkhäuser, Basel, 1990.

[3] M. Artin, J. Tate, M. Van den Bergh, Modules over regular algebras of dimension 3, *Invent. math.* **106** (1991), 335-388.

[4] R. Berger, Dimension de Hochschild des algèbres graduées, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **341** (2005), 597-600.

[5] N. Bourbaki, "Algèbre homologique" (Chapitre 10 du livre d'Algèbre), Masson, 1980.

[6] H. Cartan, Homologie et cohomologie d'une algèbre graduée, Séminaire Cartan, Paris, 1958-59, exposé 15.

[7] D. Eisenbud, "Commutative algebra with a view toward algebraic geometry", GTM 150, Springer, 1995.

[8] P. H. Hai, B. Kriegk, M. Lorenz, *N-homogeneous superalgebras*, J. Noncommut. Geom. **2** (2008), 1-51.

[9] Y. I. Manin, "Quantum groups and non-commutative geometry", Centre de Recherches Mathématiques de Montréal, 1988.

[10] C. Nastacescu, F. Van Oystaeyen, *Graded ring theory*, North-Holland, 1982.

[11] C. A. Weibel, "An introduction to homological algebra", Cambridge University Press, 1994.